

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 49.

1. Über vergleichende

*Raumgittermessungen an Steinsalz und Sylvin
mittels homogener Röntgenstrahlen und über
deren exakte Wellenlängenbestimmung;
von Ernst Wagner.*

(Hierzu Tafel I u. II.)

Die überraschende Schärfe¹⁾ der Fluoreszenzspektrallinien im Röntgenspektrum und das hervorragende theoretische Interesse, das die Serienfrequenzbeziehungen nach Moseley und Bohr beanspruchen, lassen eine genauere Wellenlängenbestimmung erwünscht erscheinen als sie bisher vorlag. Unterschieden sich doch bis vor kurzem die Werte für die Wellenlängen z. B. der Pt-Linien in der *L*-Serie bei den verschiedenen Beobachtern um mehrere Prozente, wie folgende Tabelle lehrt:

	α	β	γ	
Broglie	1,35	1,14	1,12	} $\cdot 10^{-8}$ cm
Moseley	1,816	1,121	1,104	
Bragg		1,118	1,095	

Die Wellenlängen λ sind stets nach der Interferenzreflexionsmethode aus der Beziehung gewonnen:

$$(1) \quad n \lambda = 2 d \sin \varphi.$$

Hierin bedeutet n die Ordnungszahl des Gangunterschiedes, φ den streifenden Winkel zwischen der reflektierenden Fläche und dem einfallenden Strahl und d den molekularen Abstand benachbarter reflektierender Elementarebenen. d folgt in absolutem Maße aus der Dichte des Kristalles, der Loschmidt'schen Zahl, dem Atomgewicht der den Kristall bildenden Teilchen und aus einer durch Braggs Arbeiten wohl begründeten Annahme über die Struktur des Raumgitters.

1) Vgl. E. Wagner, Physik. Zeitschr. 16. p. 30. 1915.

Die aus Unsicherheit in den soeben genannten Faktoren entspringende Unsicherheit im absoluten Werte für d und damit für λ , soll hier beiseite bleiben: unsere Aufgabe war nur, λ/d bzw. φ so genau als möglich zu messen für einen bestimmten Kristall (Steinsalz) und bei einer bestimmten Strahlung (die α -Linien der K -Serie des Palladiums). Ferner wurde untersucht, ob mehrere Individuen aus Steinsalz von verschiedener Herkunft (darunter ein trübes aus Staßfurt) innerhalb der Fehler der Meßmethode Übereinstimmung in φ zeigen d. h. ob sie dieselbe Gitterkonstante d besitzen. Endlich wurde noch eine exakte Messung von φ für einen Sylvinkristall angestellt; diese ermöglichte einen genauen Vergleich der Gitterkonstanten d der beiden Kristalle NaCl und KCl und eine Prüfung der hierfür geltenden Beziehung.

Ist einmal für eine einzige Wellenlänge λ/d genau bestimmt, so lassen sich alle anderen leicht interpolatorisch auf sie beziehen, wenn man die Pd-Strahlung in mehreren Ordnungen auf die gleiche Platte spektrographiert.

Die bisherigen Methoden.

J. Moseley¹⁾ arbeitete zuletzt mit der photographischen Methode und dem feststehenden Kristall; er berücksichtigte als Erster auch den wichtigen Einfluß einer Abweichung der reflektierenden Fläche von der Drehachse auf die Linienorte in I. und II. Ordnung und gibt an als kleinsten Fehler in φ $0,05^\circ = 3'$, während Moseley und Darwin²⁾ früher bis auf $1'$ mit der Ionisationsmethode gelangt waren.

W. H. Bragg³⁾ bestimmt neuerdings nicht sowohl die Winkelorte der Ionisationskammer, wo sie die reflektierte Strahlung durchquert, als vielmehr mit guten Gründen die Winkelstellung des reflektierenden Kristalles, bei der er die betreffende Strahlung (α -Linie der K -Serie des Rhodiums bzw. Palladiums) maximal reflektiert. Dann liefert die Differenz dieser Stellung in zwei Ordnungen ohne Korrektur für Achsenabweichung der Fläche sogleich den richtigen Wert für φ . Bedenkt man aber, daß das den Kristall treffende homogene Strahlenbündel, wie sich aus Braggs Angaben

1) Phil. Mag. 27. p. 703. 1914.

2) J. Moseley u. G. Darwin, Phil. Mag. 26. p. 210. 1913.

3) W. H. Bragg, Phil. Mag. 27. p. 881. 1914.

entnehmen läßt, einige Bogenminuten Divergenz hat und daß nicht wesentlich genauer jene Kristallstellungen definiert sein dürften, so wird auch dieser Methode keine größere Genauigkeit als auf 1–2' zukommen. Bragg gibt in der Tat als Mittel aus vielen Versuchen für zwei Gruppen: $\varphi = 17^\circ 59,8'$ und $18^\circ 0,9'$ (für die Rhodium- α -Linie bei Diamant). Außerdem erscheint die ja sehr lichtstarke Methode, den Spalt des Spektrometers in das getrennte Entladungsrohr zu verlegen, immerhin bedenklich wegen deren Verschiebbarkeit.

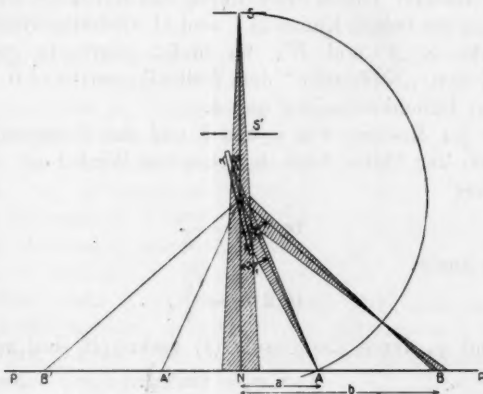


Fig. 1.

Der Deutlichkeit wegen sind φ_1 und φ_2 doppelt so groß gezeichnet als sie im Versuch waren.

Die hier benutzte Anordnung war die in Ann. d. Phys. 46. p. 868. 1915 beschriebene photographische mit dem drehenden Kristall, auf deren prinzipielle Vorzüge in der Physik. Zeitschr. l. c. eingehend hingewiesen worden ist. Fig. 1 zeigt schematisch die Anordnung und den Strahlengang im Grundriß. Durch den 0,12 mm weiten Bleispalt S fällt das schwach divergente Strahlenbündel (schraffiert gezeichnet) auf den sich drehenden Kristall K. Das durch den Kristall dringende Primärbündel trifft bei N, breit und unscharf begrenzt, die photographische Platte P, die senkrecht zum Zentralstrahl SO (O = Drehachse) aufgestellt ist. Das von der Spaltungswürfel-ebene des drehenden Kristalls reflektierte Bündel hat für

die betreffende Strahlung λ in I. Ordnung einen scharfen Fokus von der Breite des Spaltes S in A , wenn die Kristallfläche eben und $OS = OA$ ist, Bedingungen, die sehr angenähert erfüllt waren. Da φ_1 für die untersuchte Wellenlänge und die Würfelfläche des Steinsalzes nur etwa 6° beträgt, so konnte auch in II. Ordnung bei B , wo $\angle NOB = 24^\circ$, noch ein genügend scharfes Spaltbild erhalten werden, das die Doppelinie a_1 und a_2 sehr gut trennte. Inwieweit die extrafokale Unschärfe den Ort B der Linie unsicher macht, wird später genauer erörtert. Durch Schwenkung des Kristalles um 180° erhält man die beiden Linien in I. und II. Ordnung symmetrisch nach links in A' und B' . So findet man sehr genau die Mitte N , den „Nullpunkt“ der Wellenlängen: $\lambda = 0$ und die gesuchten Linienabstände a und b .

Aus der Messung von a und b und der Entfernung h der Achse von der Platte folgt der gesuchte Winkel φ_1 sowohl aus

$$(2) \quad \operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{a}{h}$$

als auch aus

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{b}{h},$$

da φ_2 und φ_1 durch das Gesetz (1) verknüpft sind zu:

$$(4) \quad 2 \sin \varphi_1 = \sin \varphi_2.$$

Dies letztere gilt unter der Voraussetzung, daß die reflektierende Kristallfläche genau in der Drehachse steht. Besteht eine Abweichung f , dann führen die gemessenen Linienabstände a und b nach (2) und (3) nicht mehr zu Winkeln φ_1 und φ_2 , die der Forderung (4) gehorchen. Man kann dann die Abweichung f berechnen daraus, daß sie zu Korrekturen an a und b führt, die in Einklang mit (4) stehen. Bei dieser Rechnung ist eine angenäherte Kenntnis des gesuchten φ_1 erforderlich, aber auch genügend, da ein rasch konvergierender Rechnungsmodus zum endgültigen Wert für φ_1 führt.

Wir wollen jetzt den Einfluß berechnen, den eine Abweichung f der reflektierenden Fläche von der Achse auf die Linienabstände a und b hat (vgl. Fig. 2). 1 ist die Kristallstellung in der Achse O_1 , 2 ist die um $f = O_1O_2$ parallel verschobene Stellung. Der Zentralstrahl vom Spalt S zur Achse O_1 werde unter $\angle \varphi$ am Kristall 1 nach dem fokussierten Spalt-

bild a_1 gebeugt, dann wird derselbe am verschobenen Kristall 2 von A parallel zu $O_1 a_1$ nach a_2 reflektiert. Die Verschiebung F der Spektrallinie $= a_1 a_2$ folgt aus Betrachtung der Dreiecke $AO_1 O_2$ und $AO_1 C$:

Es gelten:

$$f = AO_1 \sin \varphi$$

und

$$O_1 C = a_1 a_2 = F = AO_1 \cdot \operatorname{tg} 2\varphi.$$

Demnach wird:

$$(5) \quad F = f \cdot \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\sin \varphi} = 2f \frac{\cos \varphi}{\cos 2\varphi}.$$

Da φ selbst in II. Ordnung als kleiner Winkel gelten kann, so ist F ungefähr das Doppelte des Achsenfehlers f : für I. Ordnung $= 2,03 f$; für II. Ordnung $= 2,14 f$. Da F für beide Ordnungen angenähert konstant ist, so wird $(b-a)$, Fig. 1, durch Achsenfehler nicht merklich betroffen, wohl aber a . Da f leicht 0,1 mm beträgt, so beträgt $F = 0,2$ mm, d. i. für $a = 24$ mm etwa 1 Proz. Die Korrektur für Achsenabweichung ist also recht beträchtlich.

Der rechnerische Weg, um aus den gemessenen a und b das f zu finden und damit a und b zu korrigieren, war folgender: Aus (3) folgt der angenäherte Wert φ_2' und mit (4) φ_1' . Aus (2) und (3) erhalten wir:

$$(6) \quad \frac{b + 2,14 f}{a + 2,03 f} = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi_2'}{\operatorname{tg} 2\varphi_1'}$$

woraus f folgt. Die erstmalig korrigierten a und b seien mit a' und b' bezeichnet, also $b' = b + 2,14 f$. Indem nun diese korrigierten Werte rechnerisch wie soeben die unkorrigierten behandelt werden, konvergiert b und a rasch zum endgültigen Wert, der in den folgenden Tabellen mit b_{korrr} und a_{korrr} bezeichnet ist.

Justierung von Spektrometer, Kristall und Platte.

Zu häufigen Kontrollen mußte die Drehachse kenntlich gemacht sein. Zu diesem Zweck wurde auf dem zylindrischen stählernen Achsenzapfen eine gut passende, abnehmbare

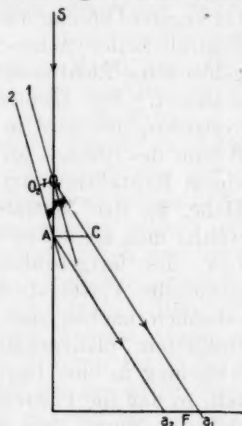


Fig. 2.

Messinghohlbüchse aufgesetzt mit einer feinen genau zentrierten Nadel. Der Bleispalt von 4 cm Länge wurde ihr parallel gestellt und seine Backenebenen soweit verschoben, daß sie bei engster Öffnung durch die Nadel wiesen. Die Richtung des Zentralstrahles: Achse-Spalt, wurde durch ein schmal ausgeblendetes Lichtbündel eines fern aufgestellten Nernststiftes realisiert. Der Lichtzentralstrahl muß senkrecht zur Achse verlaufen; dies wird in bekannter Weise kontrolliert durch Reflexion des Bündels an einer planparallelen Glasplatte, die auf einem Kristalltisch um die Achse um 180° gedreht wird. Als Höhe, wo der Zentralstrahl die Achse und den Spalt trifft, wählte man als die mittlere Höhe der photographischen Platte bzw. des festgebauten Kassettenrahmens, in den die eingewickelte Platte streng paßte. — Da die üblichen Platten erheblich uneben sind, wurden sie aus vorher optisch kontrolliertem planparallelen Spiegelglas hergestellt. Die Einwicklung in eine Lage schwarzen Papiers geschah mit Sorgfalt, so daß die Platten, wie unten sich zeigen wird, einen sehr sicheren, durch drei starke Federn bewirkten Kontakt mit den drei Ausschlägen am Kassettenrahmen erhielten. Die Plattenebene sollte senkrecht zum Zentralstrahl stehen. Die optische Reflexion ergab eine (Vertikal-) Neigung der Plattenebene gegen die Achsenrichtung von $\frac{1}{200}$; obwohl dies ohne Bedeutung für die Art unserer Messung der Linienorte war (vgl. „Meßlinie“ weiter unten) und nur die Richtung der Spektrallinien beeinflusste, wurde der Fehler korrigiert. Die noch übrigbleibende (horizontale) Abweichung der Plattennormale gegen den Zentralstrahl war so gering, daß sie keinen merklichen Einfluß auf die Linienorte haben konnte.

Der *Kristall* — ausgewählte Spaltungsstücke, möglichst eben und ohne Treppen, jedoch unbearbeitet — mußte mit seiner reflektierenden Spaltungsfläche parallel zur Drehachse gesetzt werden. Dies geschah mit Hilfe optischer Reflexion des Zentralstrahles an der Spaltungsfläche; das diffuse und lichtschwache Reflexionsbild erschwerte die Beobachtung oft, so daß durch mit den nötigen Kontrollen geschehenes Aufkleben eines Stückes eines dünnen Deckgläschens mit Erfolg nachgeholfen wurde. Die Fehler der Justierung blieben unter $\frac{1}{300}$.

Um einen sicheren experimentellen Anhalt über die

Winkelabweichung der reflektierenden Fläche von der Richtung der Achse zu gewinnen, war ein horizontaler Bleifaden vor dem zweiten Spalt S' befestigt einige Millimeter über dem Zentralstrahl. Die Verbindungslinie der Lage seines Schattens innerhalb der Spektrallinien in den verschiedenen Ordnungen (bewirkt durch ein gespanntes Haar) gegenüber der „Meßlinie“ gab ein Merkmal für die gesuchte Justierung. Sie erwies sich auf allen Platten ohne merkbaren Fehler.

Es empfiehlt sich, die reflektierende Fläche möglichst nahe an die Drehachse zu bringen. Praktisch und genau verfährt man folgendermaßen.¹⁾ Bestäubt man schwach die betreffende Fläche mit Lycopodiumsamen und schickt ein schmales Lichtbündel von einem Nernststift durch den Spalt exakt zur Achse (Nadel), so erscheint bei steileren Einfallswinkeln ein schmaler heller Streifen des Staubes. Bei fast streifender Inzidenz verbreitert sich der Streifen stark zu einem lichtschwachen Band und wandert schon bei geringer Achsenabweichung stark über die Fläche: die *Symmetrie* dieser Verbreiterung gegenüber dem schmalen Streifen ist ein recht empfindliches Merkmal ($\pm 0,05$ mm) für Koinzidenz der Oberfläche mit der Achse.

Nebenbei sei erwähnt, daß die Richtung der Ränder des beleuchteten Bandes gegenüber der Achse bei streifender Inzidenz ein weiteres empfindliches Merkmal abgibt für den Parallelismus der reflektierenden Fläche mit der Achse.

Um den Kristall sicher parallel mit sich bis in die Achse zu verschieben, war er auf einem exakten Schlitten montiert, der mit feiner Schraube bewegt werden konnte.

Messung des Abstandes h der photographischen Platte von der Drehachse.

Die Aufgabe, $h = 114$ mm etwa, auf die erforderliche Genauigkeit von 0,01 mm zu messen, wurde wie folgt gelöst. Auf den zylindrischen Stahlzapfen der Spektrometerachse wurde eine sehr gut passende messingene Hohlbüchse aufgesteckt, die oben senkrecht zur Achse eine pfenniggroße Scheibe trug. Auf die Scheibe war ein runder Spiegel gekittet und auf diesen ein Zeissches auf Glas geritztes Fadenkreuz

1) Hr. J. Malmer verfährt ebenso, wie ich aus seiner Dissertation soeben ersehe.

geklebt, das durch die Rotationsprobe genau auf den Ort der Achse justiert werden konnte. Dann ward ein stählerner „Meßstift“ angefertigt von 4 mm im Durchmesser; am einen Ende war er konisch zugespitzt, am anderen Ende trug er (vgl. Fig. 3) eine runde messingene Fassung für eine feine auf



Glas in $\frac{1}{10}$ mm geteilte Okularskala, deren Strichfolge die Verlängerung der Achse des Meßstiftes bildete. In seiner definitiven Stellung berührte der Stift mit dem konischen Ende die Platte, während das Achsenstrichkreuz unmittelbar (etwa 0,1—0,2 mm) unter der Okularskala spielte und vermöge geschickter Beleuchtung mit dem Spiegel durch eine Zeiss'sche Lupe auf $\frac{1}{100}$ mm (parallaxenfrei, wie geprüft) abgelesen werden konnte. Bei feststehendem Meßstift wurde geprüft, ob das Fadenkreuz in sich „lief“ und festgestellt, daß bei gutem Aufsetzen der es tragenden Büchse keine Fehler von 0,01 mm durch Schlottern gegen den Stahlzapfen auftraten. Es war ferner nicht unterlassen worden, zu prüfen, ob die eigentliche Drehachse des Spektrometers, die der Sektor (vgl. Ann. 46. p. 868) zur Drehung der Kristalle betätigte, zusammenfiel mit der Achse des oben erwähnten Stahlzapfens. Es ergab sich, wie nach der Herstellungsart zu erwarten, Übereinstimmung auf 0,01 mm. — Der Meßstift mußte in die Linie des Zentralstrahles *SON* gebracht werden (vgl. Fig. 1). Der Stift ruhte auf zwei justierbaren kerbenartig eingeschnittenen Trägern, die festschraubbar mit den soliden Kassettensützen verbunden waren. Durch einfache Schattenbeobachtungen der Kerben im Lichte des beleuchtenden Zentralstrahles gelingt die Justierung genügend genau, da es genügt, daß — während die Okularskala über der Kreuzstrichachse spielt — die berührende Konusspitze auf 1 mm genau die Lage von *N* einnimmt. (1 mm Fehler entspricht einer Verlängerung von $\frac{1}{300}$ mm.)

Es ging nicht an, daß der Meßstift die ungeschützte empfindliche Schicht berührte; die Schwierigkeiten, die das sich bauschende schwarze Einwickelpapier machte, wurden wie folgt überwunden. Es wurde ein Fenster 3×10 cm in das Papier geschnitten (bei einer Plattengröße $6,3 \times 13$ cm) und zwischen Platte und Fensterrahmen eine dünne weiche Alu-

miniumfolie locker eingelegt, die völligen Lichtschutz und widerstandslosen Kontakt des Stiftes gewährte, der durch schwachen Zug mit Gummischnur gegen die Platte gedrückt war.

Mit dieser Anordnung erhielten wir folgende Resultate: Die Festigkeit des Plattenträgers in der Grundplatte des Apparates war hinreichend, denn die Okularskala ließ gegen das Strichkreuz nach kräftigen elastischen Biegungen keine Stellsänderung von 0,01 mm erkennen.

Mehrmalige Meßproben nacheinander an derselben Platte ergaben stets Übereinstimmung auf 0,01 mm. Lose Kontakte ohne den Zug der Gummischnur unterschieden sich von denen unter Zug nicht um mehr als 0,01 mm. Die Werte für h vor und nach einem Versuch mit Pd-Strahlen unterschieden sich nicht um mehr als maximal 0,02 mm (meistens 0,01 mm), obwohl hier die Kreuzstrichhülse von der Achse ab- und wieder aufgesteckt war.

Sogar für fünf verschiedene Versuche mit verschiedenen Platten (allerdings in gleiches Papier eingelegt) ergab sich folgende auf 0,01 mm gehende Übereinstimmung der Ablesung der Okularskala gegen das Strichkreuz:

Versuch	Okularskala
W_{31}	+ 6,1 (Zehntel mm)
W_{32}	+ 6,1
W_{33}	+ 6,0
W_{34}	+ 6,0
W_{35}	+ 6,1

Da die Anschläge der Platten etwa 7 cm von dem Kontaktpunkt entfernt standen, so beweist die Tabelle zugleich, wie unmerklich die Krümmung unserer Platten war.

Mit einem sehr präzisen und fest gebauten Komparator der Société Genevoise wurde die Entfernung zwischen der Kontaktspitze des Meßstiftes und einem Strich der Okularskala auf ein Normalmeter aus Invar übertragen und auf 0,01 mm genau ausgewertet. Es ergab sich für den Okularteil + 6,1 eine Meßstiftlänge $\approx 114,40$ mm; die empfindliche Schicht (etwa 0,01–0,02 mm dick) stand um die Dicke der Aluminiumfolie noch weiter von der Achse; diese Dicke fand sich am Abbeschen Dickenmesser zu 0,060 mm.

Als Resultat erhalten wir für den Abstand der Achse von der Platte: $h = 114,46$ mm auf 0,01 mm genau.

Der eigentliche Versuch, die *Pd-Linien* in den *verschiedenen Ordnungen* auf der Platte zu erhalten, verlief wie folgt. Der Fokus auf der Palladiumantikathode wurde mittels Leuchtschirms und des optisch markierten Zentralstrahles genau in die Richtung des letzteren gebracht. Der Abstand Fokus—Spalt betrug etwa 25 cm; dies ergibt für die Divergenz δ des auf den Kristall treffenden Bündels etwa $\frac{1}{80}$ bei etwa 3 mm Fokusgröße. Der zweite Spalt S' (Fig. 1) wurde deshalb nur 2 mm geöffnet. Durch Vorversuche waren die Expositionszeiten für die erste Ordnung zu etwa 5 Minuten, für die zweite Ordnung zu etwa 20–30 Minuten gefunden, wobei der Drehungsbereich des Kristalles so klein als möglich gewählt war (etwa 2°), um die beiden Linien α_1 und α_2 bei voller Ausnützung der Kollimatoröffnung abzubilden. Auf diese Weise konnte der ganze, vier Lagen des Kristalles umfassende Versuch in der Zeit von $1\frac{1}{2}$ Stunden erledigt werden. Ein merkliches Wandern des Fokus konnte bei dem angewendeten *weichen* Röhrenzustand in dieser Zeit nicht bemerkt werden. Wie nach Fig. 1 zu berechnen, hat eine Fokuswanderung in der Einfallsebene von 1 mm eine extrafokale Wanderung der Linienmitte von B um 0,03 mm zur Folge. Diese Fehlerquelle ist also nicht zu unterschätzen. Das Röntgenrohr hatte ein durchlässiges „Lindemannfenster“ und wurde betrieben mit unserer Hochspannungsgleichrichter-Anordnung von Reiniger-Gebbert-Schall. Der Entladestrom betrug etwa 4 Milliamp. bei mittlerer Röhrenhärte.

Die Linienstruktur.

Die feine Doppellinie $\alpha_1\alpha_2$ zeigte sich auf den mit Rodinal und viel Bromkali entwickelten Platten bereits in I. Ordnung getrennt; in II. Ordnung hatten die Linien eine diffuse und asymmetrische Schwärzungsverteilung mit langsam abnehmender Schwärzung nach kürzeren Wellen. Die Unschärfe ist zum Teil bedingt durch die extrafokale Abbildung bei relativ großem Fokus, zum anderen Teil rührt sie her von der durch steileren Einfall bewirkten größeren Eindringungstiefe der Strahlen in den Kristall. Hierdurch wird der wirksame Reflexionsbereich parallel zur Spaltungsfläche angenähert verdoppelt gegenüber I. Ordnung. Fig. 4 zeigt den verschiedenen Tiefenbereich cc_1 der Reflexion des Primärstrahles p am Kristall K in erster

(Fig. 4a) und zweiter (Fig. 4b) Ordnung. An der Spaltungsoberfläche in O beginnt die Reflexion r_1 mit maximaler Intensität. c ist so gewählt, daß die Strahlänge Oc (bzw. $Oc + ce$) im absorbierenden Kristall für beide Ordnungen gleich ist: dann hat der reflektierte Strahl r_2 die gleiche relative Intensität im Vergleich zu r_1 . Bei unendlich schmalen Kollimatorschlitz und idealem, ebenem Kristall müßte danach innerhalb der Linien die in

Fig. 4c konstruierte asymmetrische Intensitätsver-

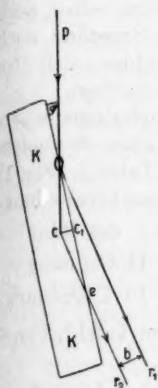


Fig. 4a.

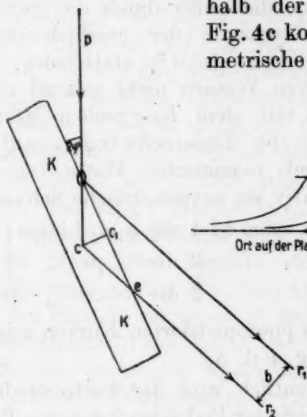


Fig. 4b.

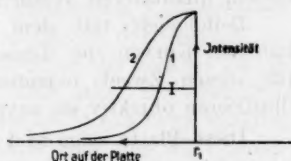


Fig. 4c.

teilung mit dem plötzlich einsetzenden Maximum stattfinden (Kurve 1 für I. Ordnung).

Sehr angenähert [vgl. Formel (5), die auch hier gilt] stehen die „Linienbreiten“ b , wie sie zwischen relativ gleichen Intensitäten, z. B. auf der Strecke I abgeschnitten werden, im Verhältnis 1:2.

Der Umstand, daß die Spaltungsoberfläche und auch die kohärenten Molekülschichten nicht streng eben sind und daß z. B. hygroskopische Einflüsse beim Steinsalz die Oberflächenstruktur zerstören, bedingt natürlich statt eines schroffen einen allmählichen Intensitätsanstieg für r_1 .

Beim Steinsalz zeigten die Linien I. Ordnung noch keine merkliche Asymmetrie bei einer Breite von etwa 0,12 mm, die der Spaltbreite entsprach. Hieraus kann man schätzungsweise auf eine Dicke der „merklich“ reflektierenden Schicht cc_1 in I. Ordnung $< 0,06$ mm schließen. Die asymmetrische Verbreiterung der Linien II. Ordnung betrug bei starker Exposition etwa 0,4 mm, woraus jene Schichtdicke cc_1 zu

0,2 mm folgt. Dem entspricht in II. Ordnung eine Strahl-
länge $Oce = 2$ mm, auf welcher der Strahl durch Absorption
merklich ausgelöscht wird. Übrigens ergab ein besonderer
Absorptionsversuch der Pd- α -Linien in einem 2 mm dicken
Steinsalzplättchen eine Absorption von schätzungsweise dem
gleichen Betrag, wie ihn dieselbe absorbierende Dicke im
Innern des reflektierenden Kristalles verursacht hätte. Die
Spezialabsorption, die außer durch die Substanz selbst noch
durch die Interferenz in der geschichteten Substanz nach
Bragg¹⁾ und Rutherford²⁾ stattfindet, schien sich bei
diesem qualitativen Versuch nicht geltend zu machen.

Beifolgende mit dem Kochschen Mikrophotometer er-
haltenen Kurven der Linienschwärzung auf einer besonders
für diesen Zweck exponierten Platte (vgl. Tafel I, Fig. 1)
illustrieren objektiv die asymmetrische Schwärzungsverteilung.

Diese Platte zeigt in 1 die α_1 - α_2 -Linien } des Pd
3 die β - „ } II. Ordnung
2 die β -u. γ - „ } des Pt I. Ordnung.

Die hiernach photometrierten Kurven zeigen Tafel I, Fig. 3
und Tafel II, Fig. 4 u. 5.

Besonders deutlich wird der Sachverhalt der Linienform
durch den Vergleich der Pt-Linien 2 mit den Pd-Linien 1 und 3.
(Als Verunreinigung des Pd kamen die Pt-Linien auch auf
unseren Meßplatten stets mit.) Da die Pt-Linien etwa die
doppelte Wellenlänge der Pd-Linien haben — man vergleiche
ihre stärkere Absorption in dem Absorptionsspektrum A einer
Metallfolie, Tafel I, Fig. 1 —, so bewirkt ihre erheblich stärkere
Absorption im Kristall eine völlig symmetrische und scharfe
Linienform.

Einen weiteren Beleg mag die auf Tafel I, Fig. 2 wieder-
gegebene Linienform im Pt-Spektrum bilden: einmal die
scharfe für den stark absorbierenden Pyrit und dann die
diffuse für den selbst für Pt-Linien extrem durchlässigen Dia-
mant. W. H. Bragg hat bei letzterem bereits diese Verhältnisse
mit der Ionisationsmethode gefunden und auseinandergesetzt.

An der Form der Linien fiel auf, daß sie bei einigen Kristallen
merklich gerade, bei anderen stärker gekrümmt war, stets

1) W. H. Bragg, Phil. Mag. 27. p. 881. 1914.

2) E. Rutherford u. Andrade, Phil. Mag. 28. p. 267. 1914.

mit der konvexen Seite nach kürzeren Wellen gerichtet. Auch schien die Krümmung im Verlauf derselben Linie unregelmäßig ein wenig zu wechseln, jedoch deckten sich die symmetrischen Linienpaare spiegelbildlich wie zu erwarten.

Die *Ausmessung der Linienorte* auf den Platten geschah mit der Schraube am Hartmannschen Photometer¹⁾ nach Einsetzen eines Fadens in das Fernrohr mit der kleinen Vergrößerung. Die Einstellung des Fadens geschah bei den merklich symmetrischen Linien I. Ordnung auf ihre Mitte mit 0,01 mm Genauigkeit; bei den asymmetrischen Linien II. Ordnung so gut als möglich auf die asymmetrisch liegende maximale Schwärzung. Diese beiden Einstellungen dürften nach den früheren Erörterungen sehr angenähert zu der *gleichen* (maximal-) *reflektierenden Schicht* unmittelbar unter der Oberfläche des Kristalls führen. Bei einer Linienbreite von etwa 0,20 mm bedingte das wohl einige Unsicherheit, doch ging die Übereinstimmung mehrerer Messungen ebenfalls auf 0,01 mm und der Fehler der Schätzung dürfte 0,02 mm nicht übersteigen. Auf der Glasseite der Platten war genau in der halben Plattenhöhe, da wo der Zentralstrahl die Platte traf, eine „Meßlinie“ mit Tinte gezogen, die längs des Spektrums senkrecht zur Symmetrielinie der zwei Pd-Linienpaare verlief und demnach bei richtig justiertem Kristall in der Einfallsebene der von der Röhre einfallenden Zentralstrahlen lag. Auf dieser Meßlinie mußte die Abstandsmessung erfolgen.

Die Linien sind nach dem in Fig. 5 gezeichneten Schema bezeichnet.

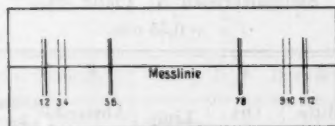


Fig. 5.

1) Da *b* und *a* (Fig. 1) mit der Schraube des Photometers, *h* mit dem Normalmeter gemessen waren, mußte die Angabe der Schraube mit dem Normalmeter geprüft werden. Dies geschah durch Abstandsmessung zweier feiner Ritzmarken längs einer Meßlinie auf einer Glasplatte. Die Komparatormessung ergab am Normalmeter 89,988 mm, die Schraubenangabe war 89,96; eine Korrektion erübrigte sich also.

Die Bedeutung der Zahlen ist folgende:

1. a_1 -Linie von Pd II. Ordnung.
2. a_2 -Linie von Pd II. Ordnung.
- (3. β -Linie von Pt I. Ordnung.)
- (4. γ -Linie von Pt I. Ordnung.)
5. a_1 -Linie von Pd I. Ordnung.
6. a_2 -Linie von Pd I. Ordnung.
7. a_2 -Linie von Pd I. Ordnung.
8. a_1 -Linie von Pd I. Ordnung.
- (9. γ -Linie von Pt I. Ordnung.)
- (10. β -Linie von Pt I. Ordnung.)
11. a_2 -Linie von Pd II. Ordnung.
12. a_1 -Linie von Pd II. Ordnung.

Die Pt-Linien waren zur Kontrolle des Nullpunktes der Wellenlängen mitgemessen worden. Da der Meßbereich des Hartmannschen Mikrophotometers nur 50 mm umfaßt, mußten die Liniengruppen 1–6, 5–8, 7–12 einzeln gemessen und aneinander angeschlossen werden. — Die folgenden Tabellen geben die Meßresultate. Kolumne 1 und 5 enthält die Liniennummer; Kolumne 2 und 4 die gemessenen Plattenorte der daneben stehenden Linien; Kolumne 3 den mittleren Ort symmetrischer Linien, „den Nullpunkt“; Kolumne 6 gibt den Linienabstand b und a vom Nullpunkt, gewonnen als halbe Differenz symmetrischer Linienorte.

Tabelle 1.

Steinsalzkrystall A; Platte W_{31} .

$f = + 0,05$ mm.

1	2	3	4	5	6	7	
Linie	Ort mm	Mitte mm	Ort mm	Linie	Abstand mm	Abstand korr. mm	
1	4,46	55,545	106,63	12	51,085	51,18	a_1 } b ; II. Ord- a_2 } nung
2	4,88	55,53	106,18	11	50,65	50,74	
3	7,33	55,555	103,78	10	48,23	48,32	
4	8,18	55,57	102,96?	9	47,39	47,49	a_1 } a ; I. Ord- a_2 } nung
5	31,38	55,575	79,765	8	24,193	24,29	
6	31,565	55,575	79,588	7	24,012	24,11	

Der Kristall A war ein gutes klares Stück von Steeg und Reuter;
2,5 × 2,5 × 0,15 cm.

Einen Prüfstein für die Richtigkeit und Genauigkeit der gemessenen Zahlen in (2) und (4) bietet die sehr befriedigende Übereinstimmung der Werte in (3) für die Mitte. Diese unterscheiden sich vom Mittelwert 55,16 höchstens um 0,03 mm, im Durchschnitt nur um 0,01 mm. Freilich bildet diese gute Übereinstimmung noch keine Gewähr dafür, daß der Faden das Schwärzungsmaximum der asymmetrischen Linien traf. Wir übergehen die umständliche Rechnung, die zu den endgültigen Werten für a und b führt; diese sind unter Kolumne 7 aufgeführt. Die Achsenabweichung f der reflektierenden Fläche berechnet sich für a_1 : +0,045 mm, für a_2 : +0,050 mm in guter, natürlich notwendiger, Übereinstimmung. Das positive Vorzeichen würde bedeuten, daß der Schwerpunkt der reflektierenden Schicht unter der Oberfläche nach dem Innern des Kristalles lag, wenn wir annehmen (was mit der Bestäubung so genau als möglich zu erreichen versucht war), daß die Oberfläche *genau* durch die Achse ging. Bei der Kleinheit von f und der Unvermeidlichkeit kleiner Fehler der Bestäubungsmethode ist es aber richtiger, in der Oberflächenschicht selbst die reflektierende Schicht zu suchen und in f den Fehler der Bestäubungsmethode zu sehen, zumal wir auch negative Werte für f fanden (vgl. unten).

Um über die *Krümmung der Spektrallinien* meßbare Resultate zu erhalten, wurden auf der gleichen Platte parallel zur Meßlinie 1 cm oberhalb und unterhalb zwei weitere Bezugslinien I und II gezogen und auf diesen wiederum die Linienorte gemessen (Tabb. 2 u. 3).

Tabelle 2.

Steinsalzkrystall A; Platte W_{51} . Bezugslinie I.

1	2	3	4	5	6	7	
Linie	Ort mm	Mitte mm	Ort mm	Linie	Abstand mm		
1	1,52	52,67	103,82	12	51,148	α_1	} b ; II. Ordnung
2	1,94	52,66	103,38	11	50,718	α_2	
3	4,40	52,67	100,95	10	—	—	
4	—	—	—	9	—	—	} a ; I. Ordnung
5	28,46	52,695	76,93	8	24,235	α_1	
6	28,64	52,69	76,74	7	24,048	α_2	

Tabelle 3.
Steinsalzkrystall A; Platte W_{21} . Bezugslinie II.

1	2	3	4	5	6	7	
Linie	Ort mm	Mitte mm	Ort mm	Linie	Abstand mm		
1	6,81	57,95	109,09	12	51,198	α_1	} b ; II. Ordnung
2	7,26	57,97	108,68	11	50,708	α_2	
3	9,71	57,98	106,245	10	—	—	
4	—	—	—	9	—	—	} a ; I. Ordnung
5	33,76	58,00	82,24	8	24,24	α_1	
6	33,95	58,00	82,05	7	24,05	α_2	

Ein Vergleich der beiden letzten Tabellen ergibt eine völlige (auf 0,01 mm) Übereinstimmung der Werte b und a ; ein Vergleich dieser mit Tab. 1 zeigt die Konvexität der Linie darin, daß die b hier um 0,05 bzw. 0,06 mm, die a um 0,05 bzw. 0,04 mm kleiner sind. Es besteht also eine merklich gleiche, zur Meßlinie symmetrische *Linienkrümmung* für die beiden Ordnungen; inwieweit das Maß 0,05 mm mit dem theoretischen Wert übereinstimmt, soll jetzt erörtert werden.

Die *Krümmung der Spektrallinien* berechnet sich für eine *ebene*, durch die Achse gehende Reflexionsfläche eines Kristalles aus der Bedingung $\varphi = \text{konst.}$ für alle Strahlengänge als eine Konvexe BB' gegen den Nullpunkt A der Wellenlängen (vgl. Fig. 6). Die Stärke der Krümmung wächst bei Annäherung

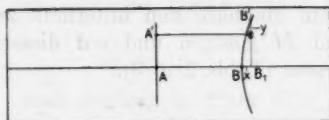


Fig. 6.

des Fokus der Antikathode an den Spalt und wird Null bei parallelen Strahlen. Wir erhalten für $B_1B = x$ bzw. $B'O = y$ folgende Bestimmungsgleichungen:

$$x = h \cdot \frac{\sin 2(\alpha - \varphi)}{\cos 2\alpha \cdot \cos 2\varphi},$$

$$y = h \cdot 2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon.$$

Hierin bedeutet h , wie früher, Distanz: Achse-Platte;
 φ den streifenden Einfallswinkel;

α ist definiert durch: $\sin \alpha = \frac{\sin \varphi}{\cos \varepsilon}$;

ε ist der Winkel zwischen Zentralstrahl und dem Strahl, der vom Fokus zu A' führt. Unter ε erscheint also AA' vom Fokus aus.

Für unsere Anordnung ergibt das für $\varphi = 6^\circ$ (I. Ordnung):
 $x = 0,005$ mm; $y = 0,052$ cm; für $\varphi = 12^\circ$ (II. Ordnung):
 $x = 0,01$ mm; $y = 0,021$ mm,

wenn $AA' = 1$ cm und $\varepsilon = 1/50$ genommen ist, wie in Tab. 2 und 3. Da x unter der Meßfehlergrenze liegt, so zeigt die in Tab. 2 und 3 gefundene Größe der Krümmung zu 0,05 mm an, daß andere Ursachen für diese stärkere Krümmung vorliegen. Ohne Zweifel liegen diese in der Form der reflektierenden Fläche. Daher wechselt die Linienform von Exemplar zu Exemplar und bei derselben Linie in ihrem Verlauf. Man kann annähernd die Hälfte der Linienkrümmung einer Krümmung des Kristalles (parallel zur Richtung der Linien) zuschreiben. Doch machen etwaige Krümmungsdifferenzen in Nachbarstreifen der Kristallfläche (parallel zur Achse) genauere Diskussionen wertlos, weil infolge der Fokussierung ein Mittelwert der Krümmung wirksam ist. Es wäre möglich, auf Grund plausibler Annahmen über die Kristallform Messungen der Linienorte außerhalb der Meßlinie mit zu verwerthen zur Bestimmung von φ für verschiedene Kristallteile. Wir haben darauf verzichtet und lieber verschiedene Exemplare untersucht.

Es soll hier noch berechnet werden der *Einfluß einer kleinen Neigung ω der reflektierenden ebenen Fläche gegen die Achse auf die Linienlage*. Unter der vereinfachenden Annahme paralleler Strahlen ergibt sich eine Neigung der (geraden) Linien um sehr angenähert den *doppelten* Betrag der Kristallneigung, was ohne weiteres einzusehen ist als Folge der Spiegelung des Spaltes an der geneigten Kristallfläche. Die genaue Berechnung liefert für die Neigung ψ der Linie:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= 2 \cdot \operatorname{tg} \omega \cdot \frac{\cos \varphi}{\cos 2 \varphi} = 2,03 \cdot \operatorname{tg} \omega \text{ für } \varphi = 6^\circ \text{ I. Ordg.} \\ &= 2,14 \cdot \operatorname{tg} \omega \text{ für } \varphi = 12^\circ \text{ II. Ordg.} \end{aligned}$$

Die Abstandsmessung der Linien voneinander darf in diesem Fall nicht mehr auf der Meßlinie erfolgen, sondern auf einer durch den Nullpunkt der Wellenlängen gehenden, um ψ dagegen geneigten Linie.

Bei einer Neigung $\omega = 1/100$ berechnet sich eine Änderung des auf der Meßlinie gemessenen Linienabstandes b für unsere Anordnung, die $< 0,01$ mm ist. ω war sicher $< 1/100$.

Tab. 4 bezieht sich auf die Linienmessungen an einem anderen Exemplar *B* Steinsalz ($3 \times 2 \times 0,6$ cm); ebenfalls klar; selbst gespalten; aus anderem Vorrat als *A*.

Tabelle 4.
Steinsalzkristall *B*; Platte W_{38} .

1	2	3	4	5	6	7	8	
Linie	Ort mm	Mitte mm	Ort mm	Linie	Abstand mm	Abstand korr. mm		
1	—	24,55	75,84	12	51,29	51,16	α_1	} b ; II. Ordg.
2	—		75,40	11	50,85	50,72	α_2	
3			72,94	10	48,39	48,26	—	
4		24,545	72,12	9	47,57	47,44	—	} a ; I. Ordg.
5	0,14		48,95	8	24,405	24,27	α_1	
6	0,85		48,75	7	24,20	24,07	α_2	

$$f = -0,06 \text{ mm.}$$

Die Linien 1 und 2 waren unterexponiert und nicht mehr im Mikroskop einstellbar. Die Pt-Linien 3 und 4 waren nur noch meßbar, wenn man das wenig (etwa 2fach) vergrößernde Okularrohr des Hartmannschen Instrumentes mit Faden benutzte. Mit Hilfe einer Teilmaschine konnte auf diese Weise noch der Abstand Δ der Linienpaare 3 und 4 gegen 5 und 6 besonders gemessen werden, wobei auf die Mitte zwischen 3 und 4 eingestellt und dieser auf den Mittelwert der einzeln gemessenen Linien 5 und 6 bezogen wurde. Es ergab sich $\Delta = 23,72$ mm. Die Symmetriestrecke Δ hierzu zwischen den Paaren (7, 8) und (9, 10) nach obiger Tabelle ergibt in guter Übereinstimmung $\Delta = 23,68$ mm. Hieraus folgt eine erhöhte Sicherheit des Mittenwertes in Kolumne 3; so daß die Abstände b für die Linien 11 und 12 einwandfrei aus ihm abgeleitet werden durften.

Das negative Vorzeichen für f würde sinnwidrig auf eine reflektierende Schicht *außerhalb* des Kristalles hindeuten, wenn die Oberfläche *exakt* in die Drehachse mit Hilfe der Bestäubungsprobe eingestellt gewesen wäre. Natürlich bedeutet $-f$ nur, daß diese Vorbedingung nicht erfüllt war. Kolumne 7 enthält die mittels f korrigierten definitiven Werteder b und a .

Tab. 5 gilt für ein *drittes Exemplar C* von Steinsalz ($3 \times 3 \times 0,7$ cm); es war grob trüb, aus Staßfurt; selbst gespalten; von augenscheinlich unregelmäßiger Struktur.

Tabelle 5.
Steinsalzkristall C; Platte W_{34} .

1	2	3	4	5	6	7	
Linie	Ort mm	Mitte mm	Ort mm	Linie	Abstand mm	Abstand korr. mm	
1	6,68?	57,90	109,12	12	51,22	51,20	α_2 } b ; II. Ordg.
2	7,11	57,89	108,66	11	50,78	50,76	
3	9,53	57,88	106,23	10	48,35	48,33	
4	10,40?	57,89	105,37	9	47,49	47,47	
5	33,61	57,91	82,21	8	24,30	24,28	α_1 } a ; I. Ordg.
6	33,78	57,91	82,04	7	24,13	24,11	

$$f = -0,01 \text{ mm.}$$

In der folgenden Tabelle 6 sind die für die drei Steinsalz-exemplare gefundenen, vom Achsenfehler freien, Abstands-werte $b_{\text{korr.}}$ und $a_{\text{korr.}}$ aus Kolumne 7 der Tabbl. 1, 4 und 5 zusammengestellt.

Tabelle 6.
Zusammenstellung.

Steinsalz- kristall	$b_{\text{korr. mm}}$	$a_{\text{korr. mm}}$	$b_{\text{korr. mm}}$	$a_{\text{korr. mm}}$	$(b - a)$ mm	$(b - a)$ mm
	α_1 -Linie		α_2 -Linie		α_1 -Linie	α_2 -Linie
A	51,18	24,29	50,74	24,11	26,89	26,63
B	51,16	24,27	50,72	24,07	26,89	26,65
C	51,20	24,28	50,76	24,11	26,92	26,65
Mittelwerte	51,18	24,28	50,74	24,10		

Der Unterschied der b - und a -Werte liegt so hart bei den Einstellungsfehlern der Linien ($\pm 0,02$ mm), daß wir als unser Resultat bezeichnen können eine *innerhalb der Meßfehler der Methode vorhandene numerische Übereinstimmung der Raumgitterkonstanten für die drei Kristall-exemplare*. Bedenkt man, daß der streifende Einfallswinkel φ_1 I. Ordnung aus der Größe $b_{\text{korr.}}$ gewonnen wird durch Gleichung (3) und (2), so erhöht sich die Genauigkeit von φ bzw. λ/d auf das 4fache der von b d. i. auf etwa $1/4000$.

Mit den Mittelwerten der obigen Tabelle für $b_{\text{kor.}}$ findet man für *Steinsalz*

in I. Ordnung: $\varphi = 5^\circ 59' 22''$ für α_1 -Linie der K-Serie.

$5^\circ 56' 39''$ für α_2 -Linie „ „

in II. Ordnung: $\varphi = 12^\circ 2' 45''$ für α_1 -Linie der K-Serie.

$11^\circ 57' 13''$ für α_2 -Linie „ „

Nebenbei ist in Tab. 6 noch eine Übersicht gegeben über die zu erwartende (vgl. p. 628) Konstanz der Werte ($b-a$).

Versuche mit Sylvin.

Mit einem großen, trüben Exemplar Sylvin ($3 \times 3 \times 0,6$ cm), dessen Würfelspaltfläche gut eben geraten war, wurde ein analoger Versuch wie bei Steinsalz gemacht. Da das Verhältnis der Raumgitterkonstanten der beiden Kristalle sich auch aus der Dichte und dem Atomgewicht der Komponenten ableiten läßt, so ließ sich hieraus eine Kontrolle für unsere Resultate mit den homogenen Röntgenstrahlen gewinnen.

Tab. 7 enthält für letztere die Messungen.

Tabelle 7.

Sylvinkristall; Platte W_{25} .

1	2	3	4	5	6	7	
Linie	Ort mm	Mitte mm	Ort mm	Linie	Abstand mm	Abstand kor. mm	
1	0,205	45,383	90,560	12	45,178	45,28	α_1 } b ; II. Ordg. α_2 }
2	0,575	45,378	90,180	11	44,803	44,90	
3	2,70	45,38	88,06	10	42,68	42,78	
4	3,42	45,375	87,33	9	41,98	42,06	
5	23,76	45,375	66,99	8	21,615	21,72	α_1 } a ; I. Ordg. α_2 }
6	23,93	45,385	66,84	7	21,455	21,56	

$$f = + 0,050 \text{ mm.}$$

Hervorzuheben ist hier die besonders gute Konstanz der Mitten in Kolonne 3, deren Differenz im Maximum 0,01 mm erreicht. Die Linien waren schärfer als beim Steinsalz, wohl nicht nur wegen der homogenen Struktur des Sylvins, sondern auch wegen der stärkeren Absorption der Strahlen im höheren Atomgewicht des Kaliums.

Die streifenden Einfallswinkel φ an Sylvin ergeben sich aus $b_{\text{kor.}}$ und h :

5° 22' 18"	I. Ordnung für a_1 -Linie
10° 47' 30"	II. „ „ „
5° 19' 52"	I. „ „ a_2 -Linie
10° 42' 34"	II. „ „ „

Ein Vergleich dieser Werte mit denen am Steinsalz liefert einmal zugleich zur Kontrolle der Meßgenauigkeit das Wellenlängenverhältnis

$$\frac{\lambda_{a_1}}{\lambda_{a_2}} = \frac{\sin \varphi (\alpha_1)}{\sin \varphi (\alpha_2)}$$

$$\text{aus Messungen am Sylvin} = \frac{\sin 10^\circ 47' 30''}{\sin 10^\circ 42' 34''} = 1,0076,$$

$$\text{Steinsalz} = \frac{\sin 12^\circ 2' 45''}{\sin 11^\circ 57' 13''} = 1,0076$$

in völliger Übereinstimmung.

Zweitens folgt das Verhältniß der Raumgitterkonstanten:

$$\begin{aligned} \frac{d_{\text{KCl}}}{d_{\text{NaCl}}} &= \left(\frac{\sin \varphi_{\text{NaCl}}}{\sin \varphi_{\text{KCl}}} \right)_{a_1} = \left(\frac{\sin \varphi_{\text{NaCl}}}{\sin \varphi_{\text{KCl}}} \right)_{a_2} \\ &= \frac{\sin 12^\circ 2' 45''}{\sin 10^\circ 47' 30''} = 1,1144 \pm 0,0005. \end{aligned}$$

Aus Dichte D und Molekulargewicht M folgt andererseits:

$$\frac{d_{\text{KCl}}}{d_{\text{NaCl}}} = \sqrt[3]{\frac{M_{\text{KCl}} \cdot D_{\text{NaCl}}}{M_{\text{NaCl}} \cdot D_{\text{KCl}}}} = 1,1162 \pm 0,0002$$

mit folgenden Daten:

$$M_{\text{KCl}} = 39,10 + 35,46 = 74,56; \quad D_{\text{KCl}} = 1,985,$$

$$M_{\text{NaCl}} = 23,00 + 35,46 = 58,46; \quad D_{\text{NaCl}} = 2,164.$$

Für die Dichten sind die Werte einer Arbeit von Röntgen und Schneider (Wied. Ann. **34**. p. 533. 1888) entnommen, nach der die Meßfehler erst die 4. Dezimale beeinflussen. Moseley gibt $D_{\text{NaCl}} = 2,167$.

Die Übereinstimmung der Werte für $\frac{d_{\text{KCl}}}{d_{\text{NaCl}}}$ nach den beiden Methoden kann als recht befriedigend bezeichnet werden; jedenfalls beweist sie die Richtigkeit der Grundlagen der

Methoden, insbesondere die Annahme Braggs einer analogen Struktur für beide Kristalle; trotzdem ist eine kleine Diskrepanz nicht zu verkennen, die die Meßfehler überschreitet. Da die Messungen von d_{NaCl} mittels der Kristallreflexion für drei sehr verschieden gewählte Exemplare nahe übereinstimmen, so vermuten wir, daß die Ursache der Abweichung in mangelnder Definiertheit der Dichte der Kristalle zu suchen sei. In der Tat kann die Dichte eines Kristalles durch Einschlüsse oder Mitkristallisation einer fremden Substanz verändert sein ohne Veränderung der Größe des elementaren Raumgitters. Dies wird augenscheinlich durch den Hinweis auf die von uns bewiesene Übereinstimmung der Gitterkonstanten des klaren Steinsalzes mit dem des grob trüben Stückes, zwischen denen ein Dichteunterschied zweifellos bestehen muß. Ist bei künstlichen Kristallen die chemische Reinheit und ihr Dichtewert gesichert, so läßt der oben erörterte Gitterkonstantenvergleich eine Kontrolle auf die richtigen Atomgewichtsverhältnisse zu.

In Anbetracht der erheblich größeren Genauigkeit mit der φ bestimmt werden kann im Vergleich mit der absoluten Größe d der Raumgitter, die von der Dichte, den Atomgewichten und der Loschmidtschen Zahl abhängt, welche letztere kaum über 1 Proz. genau sein dürfte, wäre es sehr unzweckmäßig, die absoluten Werte von λ bzw. d stets neueren verbesserten Werten jener letzten drei Größen anzupassen. *Im Interesse der relativen Richtigkeit (worauf es in den allermeisten Fällen ankommt), aller jetzt vorhandenen und künftig erhaltenen λ -Werte möchte ich mir den Vorschlag gestatten, die von Moseley in seiner grundlegenden Arbeit und in seinen Tabellen für λ verwandte Größe von d für Steinsalz = $2,814 \cdot 10^{-8}$ cm festzuhalten (wie es Rutherford, Bragg und Malmer auch schon getan haben) und auf diese die Gitterkonstanten der anderen benutzten Kristalle zu beziehen.*

Mit diesem Ausgangswert erhalten wir $d_{\text{KCl}} = 3,136 \cdot 10^{-8}$ cm und als Wellenlängen der α_1 - und α_2 -Linie der K-Serie des Palladiums mit einem Fehler von wenigen Einheiten der letzten Stelle:

$$\underline{\lambda_{\alpha_2} = 0,5828 \text{ \AA.},}$$

$$\underline{\lambda_{\alpha_1} = 0,5872 \text{ \AA.}}$$

Neuere Werte von anderen Autoren sind:

	α_1	α_2
Moseley	—	0,584
Bragg	0,589	0,583
Malmer	0,590	0,586

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Es wird mittels einer eingehend erörterten Methode experimentell geprüft, mit welcher Genauigkeit für eine homogene Röntgenstrahlung (Wellenlänge λ) der Reflexionswinkel φ an Kristallflächen (Gitterkonstante d) zu bestimmen ist. Hierbei ist insbesondere der wichtige Fehlereinfluß eliminiert, den die Abweichung der Kristallfläche von der Drehachse bedingt. Es zeigt sich, daß die Grenze der Genauigkeit in der Messung von φ bzw. λ/d gesetzt wird durch die (asymmetrische) Unschärfe der Spektrallinien, welche sich als Folge ihrer Interferenzentstehung in einem endlichen Tiefenbereich des Kristalles (sowie des Mangels an fokussierenden Linsen) darstellt. In unserem Fall ergab die Pd-K- α -Strahlung am Steinsalz einen merklichen Tiefenbereich von ca. 0,1 mm. Weichere Strahlung bzw. stärker absorbierende Kristalle lassen günstigere Linienschärfe erwarten.

Trotz dieser Unschärfe dürften die Meßfehler ca. $\frac{1}{2000}$ der gemessenen Größe φ bzw. λ/d nicht übersteigen.

2. Innerhalb der Meßgenauigkeit ergab sich für drei verschiedene Steinsalzindividuen (darunter ein grob trübes Stück) Übereinstimmung von φ für gleiches λ , d. h. Übereinstimmung ihrer Gitterkonstanten.

3. Der Vergleich der Raumgitterkonstante von Steinsalz und Sylvin zeigte gute Übereinstimmung mit dem aus Strukturdaten gefolgerten.

München, Physikal. Institut der Universität.

Januar 1916.

(Eingegangen 27. Januar 1916.)

2. Über das Mitschwingen kleiner Körper in Schallwellen; von Walter König.

Der American Physical Society haben die Herren E. P. Lewis und L. P. Farris einen Aufsatz über eine neue Methode zur Bestimmung der Amplitude der Schallwellen in Luft vorgelegt.¹⁾ Die Verfasser lassen Lykopolidium durch die Luft eines allseitig geschlossenen Kastens hindurchfallen und beobachten mit einem Mikroskop die Bahn der Teilchen, während Schallschwingungen durch ein seitliches Diaphragma auf die Luft des Kastens einwirken. Sie finden, daß die Lykopolidiumkörnchen unter diesen Umständen nicht mehr gerade Fallbahnen beschreiben, sondern Sinuskurven von geringer Amplitude, also von den Schallwellen hin- und hergeführt werden. Aus der Stärke des Mitschwingens leiten sie durch einen einfachen Ansatz die Amplitude der Schallwellen ab. In der Einleitung bemerken die Verfasser, daß sie keine Erörterungen über die Beziehungen zwischen den Amplituden der mitschwingenden Teilchen und denen der Schallwellen in früheren Arbeiten gefunden hätten. Ich kann demgegenüber darauf hinweisen, daß sich die vollständige Entwicklung des Problems des Mitschwingens — allerdings unter Beschränkung auf kugelförmige Teilchen — im ersten Teile meiner vor 25 Jahren in diesen Annalen veröffentlichten hydrodynamisch-akustischen Untersuchungen niedergelegt findet.²⁾ Die von den genannten Herren benutzte Formel stellt nur ein Glied der von mir aufgestellten strengen Formel dar. Es dürfte von Interesse sein, diesen Zusammenhang hier nachzuweisen und zugleich zahlenmäßig zu prüfen, welchen Einfluß die Berücksichtigung der anderen Glieder auf das Ergebnis hat.

Es sei m die Masse der mitschwingenden Kugel, m' die Masse einer ebenso großen Kugel der umgebenden, schwin-

1) E. P. Lewis u. L. P. Farris, Phys. Rev. (2) 6. p. 491—493. 1915.

2) W. König, Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. 42. p. 353—370. 1891.

genden Flüssigkeit. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit sei v und ihre Bewegung sei durch die Gleichung

$$v = v_0 \cos 2\pi n t$$

bestimmt, in der n die Schwingungszahl des benutzten Tones bedeutet. Die Geschwindigkeit der Kugel sei w . Ruht die Kugel in der schwingenden Flüssigkeit, so ergeben die Flüssigkeitsdrucke eine auf die Kugel ausgeübte Gesamtkraft, die in einer reibungslosen Flüssigkeit in jedem Augenblick durch den Ausdruck

$$\frac{3}{2} m' \frac{dv}{dt}$$

gegeben ist. Bewegt sich die Kugel, so ist diese Kraft durch die relative Beschleunigung der beiden Massen zueinander gegeben, also durch

$$\frac{3}{2} m' \frac{d(v-w)}{dt}.$$

Die Beschleunigung, die die Kugel durch diese Kraft erfährt, hängt aber andererseits von der Massendifferenz $m - m'$ ab, da die Kugel, wenn sie dieselbe Dichtigkeit wie die umgebende Flüssigkeit besitzt, an deren Bewegung vollkommen teilnehmen, also $w = v$ sein würde. Die Gleichung des Mitschwingens in einer reibungslosen Flüssigkeit lautet also:

$$(m - m') \frac{dw}{dt} = \frac{3}{2} m' \frac{d(v-w)}{dt}.$$

In einer Flüssigkeit mit innerer Reibung kommen hierzu die Glieder, die den Einfluß der inneren Reibung darstellen. Ich habe sie damals den Arbeiten von Basset entnommen.¹⁾ Die vollständige Gleichung des Mitschwingens lautet dann:

$$(m - m') \frac{dw}{dt} = \frac{3}{2} m' \left(1 + \frac{3}{2} b \right) \frac{d(v-w)}{dt} + \frac{9}{4} m' 2\pi n b (1 + b) (v - w),$$

wobei

$$b = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\eta}{\mu' \pi n}}$$

ist, unter η den Reibungskoeffizienten, unter μ' die Dichtigkeit der Flüssigkeit, unter R den Radius der Kugel verstanden.

1) Vgl. auch Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, Deutsche Ausgabe, p. 726. Teubner. 1907.

Die Herren Lewis und Farris benutzten die Gleichung:

$$m \frac{dw}{dt} = k(v - w)$$

und bestimmen den Faktor k aus der Maximalgeschwindigkeit w_m , die der Körper beim Fall in der Luft annimmt:

$$k = \frac{m \cdot g}{w_m}$$

Im Vergleich zu der vollständigen Formel ist hier auf der linken Seite m' gegen m vernachlässigt, was bei der geringen Dichte der Luft ohne weiteres statthaft ist. Auf der rechten Seite aber ist das Beschleunigungsglied vernachlässigt, und von dem zweiten, der Geschwindigkeitsdifferenz proportionalen Gliede, das sich wegen des Faktors $(1 + b)$ auch als eine Summe von zwei Gliedern schreiben läßt, ist nur das zweite Glied (mit b^2) beibehalten. Dieses zweite Glied lautet nämlich:

$$\frac{9}{4} m' 2 \pi n b^2 (v - w) = 6 \pi \eta R (v - w).$$

Das ist die bekannte Stokes'sche Formel für den Widerstand einer Kugel bei gleichförmiger Bewegung in einer zähen Flüssigkeit, also in obiger Bezeichnungsweise

$$k(v - w).$$

Stellt man die Bewegung des Lycopodiumkörnchens durch die Gleichung:

$$w = w_0 \cos(2 \pi n t - \varphi)$$

dar, und bezeichnet man noch, wie in meiner älteren Arbeit, das Verhältnis der Dichtigkeit μ der Kugelmasse zur Dichtigkeit μ' der Flüssigkeit mit σ und setzt man, wie dort,

$$a = \frac{2 \sigma + 1}{3},$$

so folgen aus der allgemeinen Gleichung die früher abgeleiteten Ausdrücke für φ und v_0/w_0 :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{3}{2}(a-1)b(1+b)}{a + \frac{3}{2}(a+1)b + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}b^4},$$

$$\frac{v_0}{w_0} = \sqrt{\frac{a^2 + 3ab + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}b^4}{1 + 3b + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}b^3 + \frac{3}{2}b^4}}.$$

Aus dem Ansatz der Herren Lewis und Farris dagegen ergeben sich die Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2 \pi n \cdot m}{k} \quad \text{und} \quad \frac{v_0}{w_0} = \frac{1}{\cos \varphi},$$

die sich unter der Voraussetzung, daß k durch die Stokes-
sche Formel bestimmt ist, mit Hilfe der Größen a und b auch
in folgender Weise schreiben lassen:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3a-1}{\frac{2}{3}b^2} \quad \text{und} \quad \frac{v_0}{w_0} = \sqrt{\frac{a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}b^4}{\frac{2}{3}b^4}}.$$

Um die beiden Formelpaare miteinander vergleichen zu
können, müssen a und b mit Hilfe der Dichtigkeit μ und des
Radius R der Lykopodiumkugélchen berechnet werden. Ich
will dafür die Werte benutzen, die Zeleny und Keehan bei
ihren Untersuchungen über die Gültigkeit des Stokesschen
Gesetzes¹⁾ ermittelt haben. Sie fanden den mittleren Radius
= 0,00158 cm und die mittlere Dichtigkeit = 1,175. Mit
diesen Werten und mit dem Werte $\eta = 0,000191$, wie ihn
die gleichen Verfasser bei ihren Untersuchungen anwenden,
ergibt sich

$$a = 653,1$$

$$b = 9,391$$

und daraus nach der vollständigen Formel

$$\varphi = 71^\circ 45'$$

$$v_0 = 4,6 \times w_0.$$

Die abgekürzten Formeln würden ergeben:

$$\varphi = 78^\circ 33'$$

$$v_0 = 5,0 \times w_0.$$

Die Herren Lewis und Farris haben nach ihrem Ansatz
berechnet:

$$\varphi = 84,5^\circ$$

$$v_0 = 10,4 \times w_0.$$

Diese letzteren Werte beruhen aber auf der Angabe, daß die
Fallgeschwindigkeit der Lykopodiumteilchen 7 cm/sec betragen
habe. Das ist bedeutend mehr als die von Zeleny und Keehan
beobachteten Endgeschwindigkeiten, die im Mittel nur
1,76 cm/sec betrugen. Entweder haben also die Herren
Lewis und Farris nicht einzelne Lykopodiumteilchen, son-
dern größere Verbände von solchen bei ihren Beobachtungen
vor sich gehabt, oder die Luft, in der die Teilchen fielen, ist
selbst in einer absteigenden Bewegung begriffen gewesen und
hat so eine größere Endgeschwindigkeit vorgetäuscht. In
beiden Fällen läßt sich die Beobachtung für die Berechnung
der Amplituden nicht verwerten, im letzteren Falle über-

1) John Zeleny u. L. W. Mc Keehan, Physik. Zeitschr. 11. p. 81.
1910.

haupt nicht und im ersteren Falle höchstens mit der sicherlich unzureichenden einfachen Formel der Herren Lewis und Farris, die um so weniger zulässig ist, je größer der fallende Körper und seine Endgeschwindigkeit ist. Aber *Lykodium* dürfte überhaupt für diese Versuche nicht geeignet sein, ebensowenig wie andere Sporen, da diese Körper nach den Untersuchungen von Zeleny und Keehan sämtlich die Eigentümlichkeit besitzen, dem Stokesschen Gesetze für die Endgeschwindigkeit nicht zu folgen. Nach Zeleny und Keehan ist die Fallgeschwindigkeit des *Lykodiums* nur halb so groß, wie sie nach der Stokesschen Formel sein müßte, vorausgesetzt, daß die Werte des Radius und der Dichtigkeit richtig sind. Der Mittelwert des Radius läßt sich leicht mit Hilfe der Beugungsringe des *Lykodiums* kontrollieren; ich fand ihn nach dieser Methode = 0,0017 cm, also nicht wesentlich verschieden von dem Werte 0,0016 der Herren Zeleny und Keehan. Die Dichtigkeit ergab sich mir, mit einem Volumenometer und nach einer Einschmelzmethode gemessen, sehr schwankend, zwischen 1 und 1,4, aber doch immer größer als 1, während sie nur 0,6 sein müßte¹⁾, wenn die Fallgeschwindigkeit mit der Stokesschen Formel in Einklang stehen sollte.

Wenn aber für diese Körper die Stokessche Formel nicht gültig ist, so ist auch die Gültigkeit der obigen Formeln für das Mitschwingen für solche Körper nicht zu erwarten. Um daher die Formeln auf ihre Richtigkeit zu prüfen, wie es zunächst nötig ist, wenn man von der hübschen Beobachtung der Herren Lewis und Farris aus zu einer sicheren Meßmethode für Schallamplituden gelangen will, dürfte es sich empfehlen, nicht bloß kleinere Kugeln anzuwenden zur Erzielung größerer Amplituden des Mitschwingens, sondern vor allem Kugeln aus solchen Stoffen, für die die Gültigkeit der Stokesschen Formel erwiesen ist, also etwa die Kügelchen aus schwarzem Wachs, wie sie Zeleny und Keehan benutzt haben.

Gießen, März 1916.

1) Vgl. dazu auch L. W. Keehan, *Physik. Zeitschr.* 12. p. 721. 1911.

(Eingegangen 11. März 1916.)

3. Über physikalische Eigenschaften von Lösungen in ihrem Zusammenhang. V.

Ultraviolette Dispersion von Salzen in Wasser; von Adolf Heydweiller und Otto Grube †.¹⁾

1. *Einleitung.* Die folgende Untersuchung bezweckt eine Erweiterung unserer noch spärlichen Kenntnis der Elektroneneigenschwingungen von Ionen, die für deren physikalisches und chemisches Verhalten von großer, zum Teil ausschlaggebender Bedeutung sind. Sie schließt sich auf das engste an an zwei Arbeiten von C. Lübben²⁾ über die ultraviolette Dispersion wässriger Salzlösungen, ist nach dem gleichen Verfahren und mit denselben Apparaten ausgeführt worden, so daß bezüglich fast aller Einzelheiten der Messungen auf jene verwiesen werden kann.

Diese Untersuchungen von Lübben sollten nach zwei Richtungen erweitert werden. Sie hatten in Verbindung mit anderen Arbeiten aus dem hiesigen Physikalischen Institut³⁾ ergeben, daß die optischen Eigenschaften von Salzlösungen in erster Linie durch die am Anion haftenden Valenzelektronen bestimmt werden, deren Eigenfrequenz von der Natur des Anions abhängt. Es sollten daher diese Frequenzen noch für einige weitere Anionen zu den sechs von Lübben untersuchten bestimmt werden, und weiter sollte durch Heran-

1) Die optischen Messungen zu dieser Arbeit führte Otto Grube im Jahre 1913/14 aus; der Krieg unterbrach ihre Fertigstellung. Grubes Hoffnung, sie während eines Urlaubs vollenden zu können, sollte sich nicht erfüllen; sie sank auf dem Felde der Ehre mit einem jugendfrischen Leben und einer aussichtsreichen Zukunft vor der Sichel des unerbittlichen Schnitters am 20. Oktober 1915. Die Bearbeitung in der vorliegenden Form habe ich ausgeführt. A. H.

2) C. Lübben, Rostocker Ber. u. Abh. 5. p. 27. 1913; auch Diss. Rostock 1913 und Ann. d. Phys. 44. p. 977. 1914.

3) Dissertationen von J. Bieker, K. Grufki, J. Howitz, A. Kümmerl, E. Rubien 1911—1914.

ziehung einiger Schwermetallsalze, von denen Lübben nur eines untersucht hatte, ein etwaiger Einfluß des Kations auf die Dispersion näher festgestellt werden.

2. *Die Lösungen.* Es wurden Lösungen benutzt, die zu anderen Zwecken von Heydweiller aus besten Kahlbaumschen Präparaten in bestimmter Konzentration hergestellt und auf ihre Dichte und elektrisches Leitvermögen untersucht waren.

Von den Salzen: Li_2SO_4 , LiClO_3 , $\text{LiC}_2\text{H}_3\text{O}_2$, LiCNS , Mn_2Cl , Ni_2Cl wurden je vier Lösungen von ungefähr 0,5, 1,0, 2,0 und 4,0 Äquivalenznormalität benutzt, von dem schwerer löslichen $\text{Pb}_2\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2$ nur drei von den kleineren Konzentrationen. Diese reichen leider nicht für eine weitere Verwertung aus und müssen später noch durch Beobachtungen an verdünnteren Lösungen ergänzt werden, da bei der geringfügigen elektrolytischen Dissoziation des Bleiacetats die Extrapolation auf unendliche Verdünnung (Ionenlösung) zu unsicher ist. Für dieses Salz sind daher nur die Beobachtungen mitgeteilt.

Versuche mit Nitratlösungen scheiterten an deren geringen Durchlässigkeit für ultraviolettes Licht; auch bei größter Belichtungszeit waren Linien von kleinerer Wellenlänge als $340\text{ }\mu\mu$ nicht zu erhalten.

Die Lithiumsalze wurden gewählt, weil bei ihnen die Absorption im Ultravioletten, sowie der Einfluß des Kations auf Brechung und Dispersion besonders klein sind.

3. *Versuchsordnung.* Zu den Versuchen diente der kleine Schumannsche Quarzspektrograph von R. Fuess und ein rechteckiger Trog mit diagonalen Scheidewand; diese zerlegt ihn in zwei rechtwinklige Prismen mit einem brechenden Winkel von 60° , deren brechende Flächen von planparallelen Platten aus Quarzglas begrenzt werden. Die beiden Troghälften wurden mit Wasser bzw. Lösung oder auch mit Lösungen verschiedener Konzentration gefüllt. Um Fehler durch kleine Unsymmetrien auszumerzen, wurden für jede Lösung vier Aufnahmen gemacht unter Vertauschung von Lösung und Wasser und unter Umkehrung des Troges um 180° . Zu den Aufnahmen wurden Sigurdplatten von Richard Jahr, Dresden, und ein Metolentwickler verwendet, als Lichtquelle Cadmiumfunken in 200 cm Abstand vom Spalt, ein Ab-

stand, der sich zur Erzielung scharfer Linien bei mäßiger Expositionszeit als der günstigste erwies.

Zur Ausmessung der Photogramme diente ein Zeissches Mikroskop mit mikrometrisch verschiebbarem Objekträger. Den Brechungsunterschied von Lösung und Wasser erhält man durch Multiplikation des Abstandes zwischen abgelenktem und nicht abgelenktem Spaltbild mit einem empirisch zu bestimmenden Faktor. Dieser Faktor ist etwas abhängig von der Wellenlänge, da man zur Erzielung möglichst scharfer Linien in dem ganzen untersuchten Spektralbereich die Platte nicht senkrecht zur Kollimatorachse stellen darf, sondern gegen diese Stellung etwas neigen muß.

Zur Bestimmung des Faktors hat Hr. Lübben ein von Hrn. F. F. Martens¹⁾ angegebenes Verfahren benutzt.

Dieses Verfahren liefert bei der vorliegenden Anordnung zwar für die kürzeren Wellen gute Werte, befriedigt aber nicht ganz bei den längeren Wellen, wie sich daraus ergibt, daß der Anschluß an die nach anderen Methoden erhaltenen Werte für die sichtbaren Linien zu wünschen läßt.

Es wurde daher hier ein anderes Verfahren benutzt. Der Faktor wurde für die sichtbaren Linien ermittelt mit Hilfe der Werte von $n - n_0$, die das Pulfrichrefraktometer bzw. das Zeissche Eintauchrefraktometer für dieselben Lösungen lieferte, und für die kürzeren Wellenlängen berechnet mit Hilfe der bekannten Brechungsexponenten der Quarzlinse. Es ergab sich dann eine gute Übereinstimmung für die kleinsten Wellenlängen mit den nach dem Martensschen Verfahren erhaltenen Werten.

4. Versuchsergebnisse. Eine Übersicht über die Versuchsergebnisse gibt Tab. 1. Dieselbe enthält für die einzelnen gelösten Salze die Konzentrationen m in gr-Äq./Liter, die elektrolytischen Dissoziationsgerade i , definiert als das Verhältnis der Äquivalentleitfähigkeit der betreffenden Lösung zu der einer unendlich verdünnten, sowie die zu den links verzeichneten Wellenlängen λ der einzelnen Linien gehörenden Werte der Brechungsunterschiede $(n - n_0) \cdot 10^5$ zwischen Lösung und gleichtemperiertem Wasser (18°), endlich darunter

1) F. F. Martens, Ann. d. Phys. 6. p. 606. 1901.

den auf Normalität berechneten prozentischen Brechungsunterschied:

$$(1) \quad \Delta_n = 100 \frac{n - n_0}{m n_0}$$

mit 1000 multipliziert.

Wie in der vorhergehenden Abhandlung dieser Reihe¹⁾ auf Grund der Versuche von Rubien, Grufki und Lübben schon gezeigt wurde, ist Δ eine lineare Funktion von i :

$$(2) \quad \Delta_n = B_n + (A_n - B_n) i,$$

deren Konstanten A_n und B_n gleichfalls in die Tab. 1 aufgenommen sind.

Letztere bringt nur einen Auszug aus dem gesamten Beobachtungsmaterial, der aber vollkommen zur Darstellung des Dispersionsverlaufes ausreicht. Ausgemessen wurde noch eine etwa gleich große Anzahl meist schwächerer und unschärferer Linien; diese Messungen reihen sich, bei kontinuierlichem Dispersionsverlauf gleichmäßig zwischen die mitgeteilten ein.

Tabelle 1.

Werte von $(n - n_0) \cdot 10^3$ (oben) und $\Delta_n \cdot 10^3$ (unten) für verschiedene Wellenlängen und Konzentrationen sowie der Konstanten A_n und $B_n \cdot 10^3$.

m i	Li(SO ₄) ^{1/2}				$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
	0,4307 0,517	0,871 0,428	1,744 0,302	3,493 0,201	
$10^5 \lambda \text{ cm}$					
2,574	455	880	1669	3092	930
	769	736	697	644	596
2,749	449	868	1655	3064	916
	763	730	694	642	596
2,981	445	863	1636	3029	910
	760	729	690	638	596
3,256	438	849	1617	2998	897
	752	724	685	634	595
3,405	435	845	1611	2985	887
	748	718	684	633	595
3,612	430	839	1603	2969	877
	741	714	682	631	595
4,679	422	826	1576	2921	863
	733	708	675	625	593

1) A. Heydweiller, Ann. d. Phys. 41. p. 499. 1913.

Tabelle 1 (Fortsetzung).

m i	LiClO ₃				
	0,5124 0,703	1,023 0,626	2,043 0,522	4,090 0,366	$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
$10^3 \lambda$ cm					
2,574	540 767	1070 761	2073 739	3986 710	825 645
2,749	526 754	1041 741	2016 722	3873 693	809 626
2,981	510 732	1009 725	1960 706	3751 675	789 612
3,256	499 720	987 713	1915 693	3674 664	777 600
3,405	497 718	979 708	1898 688	3637 658	774 592
3,612	488 707	968 702	1873 680	3594 652	766 586
4,679	472 688	934 682	1809 661	3468 633	747 567
m i	LiC ₂ H ₃ O ₂				
	0,4885 0,557	1,047 0,415	2,022 0,264	4,033 0,103	$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
$10^3 \lambda$ cm					
2,574	621 927	1314 914	2471 898	4842 874	972 870
2,749	590 885	1239 868	2347 850	4596 834	930 823
2,981	563 849	1190 836	2255 820	4431 808	890 797
3,256	545 825	1153 814	2180 796	4294 787	867 775
3,405	538 815	1137 805	2151 788	4242 779	854 769
3,612	529 804	1121 795	2128 778	4181 769	843 759
4,679	507 775	1073 766	1930 750	3994 740	813 729
m i	LiCNS				
	0,5109 0,714	1,031 0,639	2,082 0,531	3,465 0,413	$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
$10^3 \lambda$ cm					
2,749	1238 1773	2485 1763	4953 1741	8124 1716	1830 1638
2,981	1124 1618	2260 1612	4521 1598	7450 1581	1661 1521
3,256	1045 1512	2101 1506	4204 1492	6959 1486	1543 1441

Tabelle 1 (Fortsetzung).

m i	LiCNS				
	0,5109 0,714	1,031 0,639	2,082 0,531	3,465 0,413	$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
$10^5 \lambda$ cm					
3,405	1014 1469	2042 1466	4083 1452	6757 1446	1501 1403
3,612	982 1427	1973 1422	3948 1408	6544 1401	1457 1359
4,679	890 1300	1796 1301	3590 1288	5936 1279	1327 1247
m i	Mn $\frac{1}{4}$ Cl				
	0,4995 0,603	1,013 0,520	2,024 0,410	4,042 0,254	$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
$10^5 \lambda$ cm					
2,314	931 1341	1869 1328	3654 1299	7005 1248	1446 1190
2,574	840 1224	1683 1210	3295 1184	6359 1146	1319 1087
2,749	801 1175	1608 1161	3145 1137	6066 1098	1269 1041
2,981	766 1129	1537 1116	3005 1092	5800 1055	1221 999
3,256	738 1093	1479 1079	2894 1056	5583 1020	1182 966
3,405	727 1078	1457 1065	2848 1043	5493 1007	1166 955
3,612	715 1062	1431 1049	2797 1025	5398 991	1150 938
4,679	683 1020	1345 999	2647 976	5106 944	1101 893
m i	Ni $\frac{1}{4}$ Cl				
	0,4960 0,644	1,002 0,563	2,037 0,457	4,014 0,303	$A_n \cdot 10^3$ $B_n \cdot 10^3$
$10^5 \lambda$ cm					
2,314	1055 1530	2094 1505	4140 1463	— —	1646 1316
2,574	956 1404	1899 1380	3756 1343	7167 1300	1511 1207
2,749	915 1349	1817 1327	3596 1292	6849 1249	1456 1158
2,981	878 1301	1739 1276	3445 1244	6553 1201	1403 1113
3,256	847 1262	1679 1239	3325 1206	6329 1165	1364 1078
3,405	835 1245	1655 1222	3276 1191	6232 1150	1345 1064
4,679	783 1178	1548 1155	3064 1123	5799 1079	1280 993

Tabelle 1 (Fortsetzung).

m i	$\text{Pb}_{1/2}\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2$				
	0,4971 0,106	0,9725 0,070	2,006 0,040		
$10^5 \lambda \text{ cm}$					
2,981	1140	2133	4376		
	1633	1617	1605		
3,256	1033	1997	4086		
	1535	1516	1504		
3,405	1007	1946	3980		
	1500	1481	1469		
3,612	983	1839	3864		
	1467	1443	1431		
4,679	913	1747	3573		
	1367	1342	1334		

5. Die Eigenfrequenzen der Dispersionselektronen. Hr. Lübben konnte zeigen, daß die Dispersion der gelösten Salze sich in der Hauptsache zurückführen läßt auf die Eigenschwingungen der Valenzelektronen, die bei der Ionisation vom Kation an das Anion übergehen, aber auch im Molekül schon wesentlich an letzteres gebunden sind. Um die Eigenschwingungen dieser Valenzelektronen abzuleiten, benutzte Hr. Lübben in der bisher meist üblichen Weise empirische Dispersionsformeln, die aus den Ketteler-Helmholtzschen Gleichungen abgeleitet, den Brechungsexponenten der Lösung, sowie auch die Konstanten A_n und B_n als Funktion der Wellenlänge befriedigend darzustellen gestatten, und in denen die Wellenlänge der gesuchten Eigenschwingung als Konstante auftritt. Aus einer anderen Konstanten dieser Formeln ließ sich auch das Verhältnis von Ladung zu Masse der schwingenden Elektronen ableiten, allerdings, wie die bei verschiedenen Salzen stark schwankenden Werte der errechneten Größe zeigen, nur mit erheblicher Unsicherheit, die sich, abgeschwächt, auch auf die errechneten Eigenwellenlängen überträgt. Dazu kommt noch ein anderer Mangel dieses Verfahrens. Die Messungen zeigen, daß an der Brechung der gelösten Salze außer den Valenzelektronen noch weitere Elektronen, deren Zahl von Salz zu Salz wechselt, beteiligt sind. Die Vernachlässigung ihrer Dispersion in dem Beobachtungsgebiete würde nur unter Voraussetzung unwahrscheinlich großer Eigenfrequenzen gestattet sein; besitzen sie aber auch eine merkliche Dispersion,

so muß deren Vernachlässigung bei der Berechnung die errechnete Dispersion der Valenzelektronen zu groß ergeben.

Es wird daher hier ein anderer Weg eingeschlagen, der sich bereits als gangbar erwiesen hat.¹⁾ Wir benutzen die Dispersionsgleichung der Drudeschen Elektronentheorie unter Zugrundelegung folgender Annahmen²⁾:

1. Jedes Kation enthält eine gewisse Anzahl gebundener Elektronen von einer gemeinsamen ziemlich hohen Eigenfrequenz, die von der Natur des Kations unabhängig ist.

2. Jedes Anion enthält erstens gleichfalls eine größere Zahl solcher fester gebundenen Elektronen hoher Eigenfrequenz, zweitens eine der Valenzzahl entsprechende kleine Zahl loser gebundener (halbfreier) Valenzelektronen von wesentlich niedrigerer Frequenz, auf welche der Hauptanteil der Dispersion zurückzuführen ist.

3. Allen Elektronen kommt das gleiche (normale) Verhältnis von Ladung zu Masse zu, wie den langsamen β - und Kathodenstrahlen ($e/m = 5,30 \cdot 10^{17}$ C.G.S. el. stat.).

Die Begründung der ersten Annahme liegt in der Tatsache³⁾, daß die Ionenrefraktionen der Kationen sich mit erheblicher Genauigkeit darstellen lassen als ganze, z. T. kleine Vielfache eines Einheitsvolumens, der Elementarstere.

Die zweite Annahme wird durch die Tatsache belegt, daß die Dispersion der ionisierten gelösten Salze im wesentlichen durch das Anion bestimmt wird und nur in geringfügigem Maße vom Kation abhängt.⁴⁾

Die dritte Annahme gründet sich auf den Umstand, daß die aus den Frequenzen und den Dimensionen der Elektronenbahnen berechneten Geschwindigkeiten der schwingenden Elektronen kleiner als $\frac{1}{100}$ der Lichtgeschwindigkeit sind.

Unter der einfachsten mit den Tatsachen verträglichen Annahme⁵⁾, daß das Wasserstoffkation ein Elektron enthält,

1) A. Heydweiller, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 179. 1915.

2) Vgl. auch A. Heydweiller, Ann. d. Phys. 48. p. 683. 1915.

3) Vgl. A. Heydweiller, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 14. p. 878. 1912; Ann. d. Phys. 41. p. 523. 1913; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 16. p. 722. 1914.

4) Vgl. die Arbeiten der vorhergehenden Anmerkung.

5) A. Heydweiller, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 359. 1915.

berechnet sich die Schwingungszahl der gebundenen Kationelektroden zu $\nu_{\kappa} = 10,6_5 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$.

Auch für die gebundenen Elektronen der Anionen ist für die folgenden Rechnungen wenigstens ein Näherungswert der Schwingungszahl ν_a erforderlich. In Ermangelung einer besseren, machen wir die Behelfsannahme, daß $\nu_a = \nu_{\kappa}$ ist.

Diese Annahme ist sicher nicht richtig; wenn sie für die einatomigen Anionen F, Cl, Br, J vielleicht annähernd zutreffen könnte, so dürfte dies für die zusammengesetzten Anionen, wie ClO_3 usw., schon deswegen nicht der Fall sein, weil diese ja noch Valenzelektronen von sicherlich anderer Bindung enthalten. Aber wenn diese Bindung nur stark ist gegen die der halbfreien Valenzelektronen — und das ist aus mehr als einem Grunde wahrscheinlich —, so kommt es für die Schwingungszahl der letzteren und ihre Berechnung sehr wenig auf die genauen Werte der Schwingungszahlen der fester gebundenen Elektronen an. (Vgl. p. 662).

Zu diesen Berechnungen dienen die nachstehenden Bezeichnungen, Zahlenwerte in C.G.S. und Gleichungen (Temperatur 18°):

ν die Schwingungszahl der benutzten Lichtart,

ν_1 die Eigenschwingungszahl der halbfreien Valenzelektronen des Anions,
 $\nu_g = \nu_{\kappa} = \nu_a = 10,65 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ dieselbe für die gebundenen Elektronen von Kation und Anion,

$p = p_{\kappa} + p_a$ die Anzahl derselben in der Molekel, bzw. im Äquivalent,
 $N \cdot e = 2,895 \cdot 10^{14}$ die elektrostatische Ladung eines einwertigen gr-Ions,
 M_1, V_1 und n_1 Äquiv.-Gewicht, Äquiv.-Volumen und Brechungsexponent des vollständig ionisierten gelösten Salzes in der Konzentration der Normallösung, also $V_1 = 1000 \text{ cem}$,

R_i die Lorenz-Lorentz-Äquiv.-Refraktion desselben, also

$$(3) \quad R_i = V_1 \frac{n_1^2 - 1}{n_1^2 + 2}$$

und

$$(4) \quad n_1^2 + 2 = 3 \left(1 + \frac{R_i}{1000} \right)$$

bei Vernachlässigung von $R_i^2/10^6$ gegen 1.

Wie früher gezeigt¹⁾, berechnet sich R_i aus den Ionenmoduln der Dichte und Lichtbrechung A , und A_n , sowie aus dem Brechungsexponenten n_0 des Wassers nach

1) A. Heydweiller, Ann. d. Phys. 41. p. 527. 1913; J. Howitz, Diss. Rostock 1914.

$$(5) \quad R_i = 10 \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2} \left\{ \frac{6 A_n}{n_0^2 + 1 - 2/n_0^2} + \frac{M}{10} - A_s \right\}.$$

Ferner ergibt Drudes Elektronentheorie die Beziehung

$$(6) \quad n_1^2 - 1 = \frac{N \cdot e}{V_1 \pi} \cdot \frac{e}{m} \left\{ \frac{1}{\nu_1^2 - \nu^2} + \frac{p_n}{\nu_n^2 - \nu^2} + \frac{p_s}{\nu_s^2 - \nu^2} \right\},$$

also nach unserer Annahme $\nu_n = \nu_s = \nu_g$, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$(7) \quad C_n = \frac{1}{\nu_1^2 - \nu^2} + \frac{p}{\nu_g^2 - \nu^2},$$

$$(8) \quad R_i = \frac{1}{n_1^2 + 2} \frac{N \cdot e}{\pi} \cdot \frac{e}{m} C_n = \frac{16,28 \cdot 10^{30}}{1 + R_i/1000} C_n$$

nach (4) oder

$$(9) \quad 10^{30} C_n = \frac{R_i}{16,28} \left(1 + \frac{R_i}{1000} \right).$$

Mit Hilfe von (5) läßt sich also auch C_n aus den beobachteten Werten von n_0 , A_n , A_s und M berechnen.

Aus zwei Werten C_n und C_n' dieser Größe für verschiedene Lichtarten von den Schwingungszahlen ν und ν' ergibt sich weiter nach (7) unter Benutzung folgender Abkürzungen:

$$(10) \quad \begin{cases} N_1 = (\nu^2 - \nu'^2) \frac{p + 1 + C_n \nu^2 + C_n' \nu'^2}{p(C_n - C_n') - C_n C_n'(\nu^2 - \nu'^2)} - \nu^2 \nu'^2, \\ M_1 = \frac{1}{2} \left\{ \nu^2 + \nu'^2 - \frac{(C_n + C_n')(\nu^2 - \nu'^2)}{p(C_n - C_n') - C_n C_n'(\nu^2 - \nu'^2)} \right\}, \\ N_2 = (-\nu^2 - \nu'^2) \frac{1 + (1 + C_n \nu^2 + C_n' \nu'^2)/p}{C_n C_n'(\nu^2 - \nu'^2) - (C_n - C_n')} - \frac{\nu^2 \nu'^2}{p^2}, \\ M_2 = \frac{\frac{1}{2}(C_n + C_n')(\nu^2 - \nu'^2)}{C_n C_n'(\nu^2 - \nu'^2) - (C_n - C_n')} + \frac{\nu^2 + \nu'^2}{2p}. \end{cases}$$

$$(11) \quad \nu_1^2 = M_1 + \sqrt{N_1^2 + M_1^2}, \quad \frac{\nu_g^2}{p} = M_2 + \sqrt{N_2^2 + M_2^2}.$$

Für die Berechnung genügt das Einsetzen eines leicht zu erhaltenden Näherungswertes von p in die Gleichungen (10), da die Werte von N_1 usw. nur in sehr geringem Maße von p abhängen; dasselbe gilt daher von den Werten von ν_1^2 und ν_g^2/p ; ν_1^2 ändert sich z. B. in den meisten Fällen noch nicht um 0,1 Proz., wenn p um 10 Proz. variiert. Wir haben, entsprechend den obigen Annahmen, den Wert von p so gewählt, daß ν_g dem oben angeführten Werte von $\nu_n = 10,65 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ möglichst nahe liegt.

Der Berechnung dient die Hilfstabelle 2, die für die benutzten Lichtwellenlängen λ die Werte von

$$v^2, n_0, \frac{1}{1,628} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}, \frac{6}{n_0^2 + 1 - 2/n_0^2}$$

enthält. Die Brechungsexponenten des Wassers n_0 bei 18° sind den Beobachtungen von Flatow¹⁾ entnommen.

Tabelle 2.

$10^5 \lambda$ cm	$10^{-30} v^2$	n_1 18°	$\frac{1}{1,628} \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2 + 2}$	$\frac{6}{n_0^2 + 1 - 2/n_0^2}$
2,314	1,6814	1,38902	0,14529	3,170
2,574	1,3587	1,37366	0,14017	3,284
2,749	1,1907	1,36658	0,13779	3,340
2,981	1,0122	1,35950	0,13540	3,397
3,256	0,8487	1,35326	0,13328	3,450
3,405	0,7763	1,35064	0,13239	3,473
3,612	0,6898	1,34758	0,13134	3,499
4,342	0,4774	1,34054	0,12894	3,563
4,679	0,4110	1,33835	0,12819	3,583
4,863	0,3806	1,33735	0,12785	3,592
5,895	0,2590	1,33320	0,12642	3,598
6,569	0,2088	1,33135	0,12578	3,649

Tab. 3 enthält die weiteren für die Berechnung erforderlichen Zahlen, zusammengestellt mit den Ergebnissen der Berechnung, also die Werte von A_n für die verschiedenen Wellenlängen, und zwar die aus Tab. 1 entnommenen ergänzt durch die von anderen Beobachtern²⁾ im Sichtbaren gewonnenen Werte, ferner $M/10$, A_s und die p -Werte, getrennt für die beiden Ionen, sowie auch v_a^2 und v_a^2/p_a für das Anion allein der besseren Vergleichbarkeit halber angeführt sind. Die Werte von p_n ergeben sich aus den angeführten früheren Mitteilungen auf Grund der Festsetzung, daß das Wasserstoffkation ein Elektron enthält.

Der obere Teil der Tab. 3 bringt ferner noch die nach (5) und (9) aus den Beobachtungen abgeleiteten Werte von C_n . Andererseits wurde C_n mit den im unteren Teile angegebenen Konstanten C_n nach (7) und aus diesem A_n nach (5) und (9) berechnet; unter δ (bei NiCl_2 unter δ_1) stehen die Unterschiede zwischen den „beobachteten“ und den so berechneten

1) E. Flatow, Ann. d. Phys. 12. p. 85. 1903.

2) E. Rubien, K. Grufki, J. Bieker, G. Limann, J. Howitz.

Tabelle 3.

$10^5 \lambda$ cm	$\text{Li}(\text{SO}_4)_{1/2}$			LiClO_3		
	$10^3 A_n$	δ	$10^{30} C_n$	$10^3 A_n$	δ	$10^{30} C_n$
2,314	—	—	—	—	—	—
2,574	930	-5	0,4675	825	\pm	0,8755
2,749	916	-3	0,4611	809	+2	0,8591
2,981	910	+5	0,4559	789	-2	0,8412
3,256	897	+4	0,4494	777	-1	0,8277
3,405	887	\pm	0,4448	774	+2	0,8234
3,612	877	-4	0,4399	766	\pm	0,8160
4,342	870	+3	0,4356	—	—	—
4,679	863	\pm	0,4322	747	-2	0,7955
4,863	860	\pm	0,4309	—	—	—
5,895	855	+2	0,4277	—	—	—
6,565	853	+2	0,4265	—	—	—
$M/10$		5,497			9,040	
A_s		5,242			5,592	
p_s		3			3	
p_a		26			59	
$10^{-30} \nu_a^2$		114,4			112,8	
$10^{-30} \nu_a^2/p_a$		4,399			1,940	
$10^{-30} \nu_1^2$		6,061			4,495	
$10^{-15} \nu_1$		2,462			2,120	
$10^5 \lambda_1$		1,218			1,415	
$10^5 \lambda$ cm	$\text{LiC}_2\text{H}_3\text{O}_2$			LiCNS		
	$10^3 A_n$	δ	$10^{30} C_n$	$10^3 A_n$	δ	$10^{30} C_n$
2,314	—	—	—	—	—	—
2,574	972	\pm	1,0113	—	—	—
2,749	930	\pm	0,9825	1830	+2	1,4127
2,981	890	-4	0,9534	1661	-5	1,3208
3,256	867	+1	0,9333	1543	-5	1,2555
3,405	854	-1	0,9240	1501	-1	1,2324
3,612	843	\pm	0,9144	1457	+3	1,2071
4,342	815	-2	0,8911	1362	+5	1,1515
4,679	813	+2	0,8867	1327	-2	1,1317
4,863	809	+3	0,8850	1324	+6	1,1290
5,895	797	+1	0,8721	1278	+1	1,1006
6,565	791	-1	0,8666	1261	-3	1,0898
$M/10$		6,596			6,502	
A_s		2,689			2,590	
p_s		3			3	
p_a		63			72	
$10^{-30} \nu_a^2$		113,4			113,9	
$10^{-30} \nu_a^2/p_a$		1,802			1,582	
$10^{-30} \nu_1^2$		3,730			2,531	
$10^{-15} \nu_1$		1,931			1,591	
$10^5 \lambda_1$		1,553			1,886	

Tabelle 3 (Fortsetzung).

$10^5 \lambda$ cm	Mn^{2+}/Cl^-			Ni^{2+}/Cl^-			
	$10^3 A_n$	δ	$10^{30} C_n$	$10^3 A_n$	δ_1	δ_2	$10^{30} C_n$
2,314	1446	+4	0,8010	1646	\pm	+2	0,7706
2,574	1319	-2	0,7356	1511	-4	-1	0,7065
2,749	1269	\pm	0,7099	1456	-1	+2	0,6813
2,981	1221	-1	0,6844	1403	-5	-1	0,6543
3,256	1182	-1	0,6643	1364	-2	+2	0,6357
3,405	1166	-1	0,6561	1345	-2	+3	0,6274
3,612	1150	+1	0,6477	Absorpt.	—	—	—
4,342	1111	\pm	0,6265	1333	+48	\pm	0,6212
4,679	1101	+2	0,6214	1280	+11	\pm	0,5965
4,863	1093	\pm	0,6174	1270	+8	\pm	0,5922
5,895	1075	\pm	0,6073	1244	+2	-2	0,5790
6,565	1068	\pm	0,6034	1232	-3	-4	0,5734
$M/10$	6,293			6,480			
A_s	5,440			6,460			
p_x	10			7			
p_a	26			26			
$10^{-30} \nu_a^2$	110,1			111,4			
$10^{-30} \nu_a^2/p_a$	4,233			4,285			
$10^{-30} \nu_1^2$	3,813			3,807			
$10^{-15} \nu_1$	1,953			1,951			
$10^5 \lambda_1$	1,536			1,538			

 $p' = 0,000464$ $10^{-30} \nu_1'^2 = 0,497$ $10^{-15} \nu_1' = 0,705$ $10^5 \lambda_1' = 4,255$

Werten von A_n in Einheiten der letzten mitgeteilten Stelle, die der fünften Dezimale des Brechungsindex entspricht. Auf diese Weise erhält man das beste Urteil über den Grad des Anschlusses der Beobachtungen an die Berechnung, den die graphische Darstellung der nachstehenden Figur (A_n als Funktion von ν^2) noch unmittelbar erkennen läßt.

In den verhältnismäßig wenigen Fällen, in denen $\delta \leq 5$ wird, liegen nachweisbar auch größere Unsicherheiten in den Beobachtungen, infolge Schwäche oder Unschärfe der Linien, vor. Berücksichtigt man, daß die direkten Beobachtungsfehler bei der Ableitung der A_n -Werte noch durch Extrapolationsfehler (auf unendliche Verdünnung) vergrößert werden, so darf man behaupten, daß die Abweichung zwischen „Beobachtung“ und Rechnung die Bestimmungsfehler nirgends überschreiten, mit Ausnahme von Nickelchlorid, von dem zugleich noch die Rede sein wird. Die Beobachtungen liefern somit innerhalb der erreichten Genauigkeitsgrenzen eine gute

Bestätigung der im Eingang dieses Abschnittes gemachten Annahmen über die Elektronenoptik der Ionen.

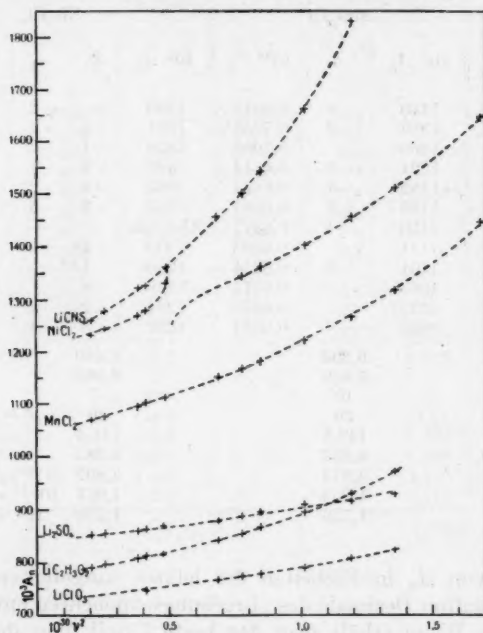


Fig. 1.

6. **Nickelchlorid.** Gegenüber den anderen untersuchten Salzen nimmt das Nickelchlorid insofern eine Ausnahme-stellung ein, als es innerhalb des Beobachtungsgebietes, und zwar nahe der violetten Grenze des sichtbaren Spektrums, einen schmalen Absorptionsstreifen aufweist, dem es seine Färbung verdankt. Es bedarf daher noch einer gesonderten Besprechung; denn der Absorptionsstreifen kommt in stärkeren, die Beobachtungsfehler übertreffenden Abweichungen zwischen den „beobachteten“ und den nach Formeln (5), (7) und (9) berechneten Werten von A_n im sichtbaren Spektralgebiet zum Ausdruck (vgl. die Werte δ_1 für NiCl_2 in Tab. 3).

Man trägt aber diesen Abweichungen vollkommen Rechnung, indem man dem Werte (7) für C_n noch ein weiteres

Glied für die dem Absorptionsstreifen entsprechende Eigenschwingung hinzugefügt und an Stelle von (7) zur Berechnung der Dispersion die Gleichung

$$(7a) \quad C_n = \frac{1}{\nu_1^2 - \nu^2} + \frac{p}{\nu_0^2 - \nu^2} + \frac{p'}{\nu_1'^2 - \nu^2}$$

benutzt. Die Werte von δ_1 für die Wellenlängen $\lambda = 4,342, 4,679, 4,868 \cdot 10^{-5}$ cm gestatten die neuen Konstanten p' und ν_0' mit einiger Annäherung, wenn auch nicht sehr genau, zu berechnen, und es ergeben sich dafür die im unteren Teil von Tab. 3 angeführten Werte. Die mit Hilfe derselben nach den Formeln (5), (7a) und (9) berechneten Werte von A_n zeigen nun wieder eine sehr gute Übereinstimmung mit den „beobachteten“, wie die unter δ_2 in Tab. 3 aufgeführten Unterschiede und die Fig., in der die hiernach berechnete Kurve eingezeichnet ist, zeigen. Die etwas größere Abweichung für den letzten Wert für $\lambda = 6,565 \cdot 10^{-5}$ cm dürfte auf einen weiteren Absorptionsstreifen im Ultrarot, der bei $\lambda = 7 \cdot 10^{-5}$ cm¹⁾ liegt, zurückzuführen sein.

Wie man aus dem kleinen Wert von p' ersieht, rührt der violette Absorptionsstreifen von Elektronen in vergleichsweise zur Gesamtkonzentration des Salzes sehr geringer Zahl her — weniger als 1/2000 der Normalkonzentration — und man geht wohl nicht fehl in der Annahme, daß er herrührt von der Bildung von Komplexanionen mit erheblich loser gebundenem Valenzelektron. Es ist von Interesse, daß das hier verfolgte Verfahren den Betrag dieser Komplexbildung zu bestimmen gestattet, der wegen seiner Geringfügigkeit auf andere Weise nur schwer zu ermitteln sein wird.

7. *Die Eigenschwingung des Valenzelektrons am Chloranion.* Außer den vorliegenden Messungen der ultravioletten Dispersion der zwei Schwermetallchloride von Mangan und Nickel stehen noch die weiteren Messungen von Hrn. Lübben an drei Leichtmetallchloriden von Lithium, Natrium und Caesium zur Verfügung. Auch diese Beobachtungen lassen sich in derselben Weise, wie es hier geschehen ist, berechnen, und zwar mit derselben Genauigkeit, wie nach den mehr empirischen Formeln, die Hr. Lübben benutzte, obwohl begreiflicherweise die Konstanten nicht unerheblich von denen

1) Vgl. H. C. Jones u. J. S. Guy, Ann. d. Phys. 43. p. 589. 1914.

abweichen, die das andere Rechenverfahren ergab. Es ist das schon darin begründet, daß die neue Berechnung einen Teil der Dispersion den gebundenen Elektronen zuschreibt, während diese nach der alten ausschließlich dem Valenzelektron zufällt, zum kleineren Teil aber auch darin, daß die Beobachtungen im Ultravioletten in der oben (p. 655) angegebenen Weise zum besseren Anschluß an die Messungen im Sichtbaren gebracht und diese mitbenutzt sind.

In Tab. 4, die dem unteren Teil von Tab. 3 entspricht, sind die Werte für alle fünf untersuchten Chloride zusammengestellt, von denen hauptsächlich die von ν_1 von Bedeutung sind. Die Werte von ν_a^2/p_a sind schon viel stärker durch Unsicherheiten in den Beobachtungen beeinflusst, und die Einzelwerte von ν_a^2 und p_a sind, wie oben schon bemerkt, ihrer Größe und physikalischen Bedeutung nach unsicher und zweifelhaft.

Tabelle 4.

	1. LiCl	2. NaCl	3. $Mn\frac{1}{2}Cl$	4. $Ni\frac{1}{2}Cl$	5. CsCl	Mittel aus 1—4
$M/10$	4,240	5,846	6,293	6,480	16,827	—
A_i	2,662	4,380	5,440	6,460	13,520	—
p_a	3	7	10	7	48	—
p_a	26	26	26	26	26	—
$10^{-30} \cdot \nu_a^2$	114,3	113,6	110,1	111,4	119,4	112,4
$10^{-30} \cdot \nu_a^2/p_a$	4,395	4,369	4,233	4,285	4,592	4,321
$10^{-30} \cdot \nu_1^2$	3,816	3,824	3,813	3,807	3,664	3,815
$10^{-15} \cdot \nu_1$	1,954	1,956	1,953	1,951	1,914	1,954
$10^5 \cdot \lambda_1$	1,536	1,533	1,536	1,538	1,567	1,536

Die Werte von ν_1 aber zeigen eine bemerkenswerte, für die vier ersten Salze sogar sehr gute Übereinstimmung; auch das Nickelsalz bildet trotz der anomalen Dispersion im Violett keine Ausnahme. Nur der ν_1 -Wert für das Cesiumsalz mit dem schwersten Anion weicht etwas stärker, aber auch nur um 2 Proz., ab in dem Sinne, daß die Dispersion etwas größer ist als bei den übrigen Chloriden.

Wenn wir der Ursache dieser Abweichung nachgehen, so können wir zunächst feststellen, daß sie zweifellos mit dem hohen Atomgewicht des Kations zusammenhängt. Denn alle Salze von Kationen hohen Atomgewichts zeigen, verglichen mit denen niederen Atomgewichts und demselben Anion, eine

größere Dispersion, wie besonders Hrn. Lübbens Beobachtungen am Thalliumfluorid, verglichen mit Ammoniumfluorid, und die vorliegenden Beobachtungen an Bleiacetat, verglichen mit Lithiumacetat, in schwächerem Maße auch schon Rubidiumbromid gegen Lithiumbromid (Lübben), erkennen lassen.

Es ist weiter zu beachten, daß auch die ultraviolette Absorption bei den Salzen mit sehr schwerem Kation bedeutend größer ist als bei denen mit leichtem. So läßt sich auch bei langdauernder Belichtung das Spektrum des Caesiumchlorids nicht über $\lambda = 2,57 \cdot 10^{-5}$ cm, das des Thoriumchlorids sogar nur bis $\lambda = 2,74 \cdot 10^{-5}$ cm erhalten, während das der übrigen untersuchten Chloride bis $\lambda = 2,31 \cdot 10^{-5}$ cm und weiter ins Ultraviolette reicht; ebenso geht das des Bleiacetats nur bis $\lambda = 2,98 \cdot 10^{-5}$ cm, das des Lithiumacetats dagegen bis $\lambda = 2,57 \cdot 10^{-5}$ cm.

Es liegt daher die Annahme nahe, daß hier im Ultravioletten ähnliche Verhältnisse vorliegen wie beim Nickelchlorid im Sichtbaren, d. h. daß infolge von Komplexbildungen noch langsamere Elektronenschwingungen auftreten, als die der normalen Valenzelektronen, und daß diese, die eine weit geringere Konzentration haben werden, ein schmaleres Absorptionsgebiet und eine anomale Dispersion im Ultravioletten bewirken.

Diese Annahme wird gestützt durch die bekannte Erfahrungstatsache, daß die schweren Ionen stärker zu Komplexbildungen neigen als die leichteren. Auch treten mehrfach in den Dispersionsbeobachtungen an der äußersten erreichbaren Grenze gegen das Ultraviolette Abweichungen gegen die Berechnungen auf, die auf eine anomale Dispersion hindeuten, aber leider nicht die Größe besitzen, um, wie beim Nickelchlorid, die betreffende Eigenschwingung zu berechnen. Die Nichtberücksichtigung aber läßt die berechnete Eigenschwingungszahl der normalen Valenzelektronen zu klein erscheinen, sowie sich aus der sichtbaren Dispersion des Nickelchlorids auch ein zu kleiner Wert von ν_1 nach Gleichung (7) ergibt.

8. Zusammenfassung und Ergebnisse.

1. Es wurde die ultraviolette Dispersion für sieben Salze bei verschiedenen Konzentrationen im Wasser gemessen und daraus die Dispersion der Ionenlösungen durch Extrapolation abgeleitet.

2. Es wurde gezeigt, daß die sichtbare und ultraviolette Dispersion der Ionenlösungen sich durch die Dispersionsgleichung der Drudeschen Elektronentheorie gut darstellen läßt, und zwar unter Annahme von zwei Elektronenarten für die ungefärbten Salze, einer kleineren der Valenz entsprechenden Zahl von lose am Anion sitzenden Valenzelektronen und einer größeren Zahl fester gebundener Elektronen am Anion und am Kation, alle mit gemeinsamem, normalem Werte von e/m .

3. Es wurde die Eigenschwingung der Valenzelektronen, für die Anionen SO_4 , ClO_3 , Cl , $\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2$, CNS bestimmt. Die Schwingungszahlen nehmen in der vorstehenden Reihenfolge ab.

4. Es wurde der Nachweis geliefert, daß diese Schwingungszahlen im allgemeinen von der Natur des Kations im Salze kaum abhängen. Nur für sehr schwere Kationen zeigt sich ein merklicher Einfluß, der sehr wahrscheinlich auf Bildung von Komplexionen zurückzuführen ist.

5. Ebenfalls der Bildung von Komplexionen mit loser gebundenem Valenzelektron in geringer Konzentration ist die Absorption des Nickelchlorids im sichtbaren Violett zuzuschreiben. Die Konzentration und Elektroneneigenschwingung der Komplexionen wurde bestimmt.

Rostock, Physik. Institut, Februar 1916.

(Eingegangen 11. Februar 1916.)

4. *Elementare Ableitung der Geschwindigkeit von Kreis- und Schraubenwirbeln;* *von A. Lauth.¹⁾*

1. Vor kurzem hat Hr. A. Gray²⁾ mit elementaren Hilfsmitteln ohne Benutzung von elliptischen Integralen eine Neuableitung des Lord Kelvinschen Wertes für die Geschwindigkeit eines Kreiswirbels gegeben. Auf ganz anderem Wege ergibt sich im folgenden eine vielleicht noch einfachere Ableitung der Geschwindigkeit von Kreis- und außerdem von Schraubenwirbeln, die weiterhin auf die Bestimmung eines Näherungswertes für den Flüssigkeitswiderstand im Falle des Auftretens von Kreiswirbeln Anwendung findet.

In einer ruhenden, unbegrenzten, inkompressiblen Flüssigkeit sei ein einziger Wirbel von kleinem Querschnitt der eigentlichen Wirbelader oder Wirbelachse gegeben. Der Querschnitt der Wirbelader sei ein Kreis von einem Radius R , der über die ganze Wirbelader konstant sein soll. Von diesen vereinfachenden Annahmen geht man im allgemeinen aus, bestimmt einen Näherungswert für die Stromfunktion bzw. das Geschwindigkeitspotential und berechnet daraus durch Differentiation die Geschwindigkeit des Wirbels, natürlich unter der für Kreis- und Schraubenwirbel zutreffenden Voraussetzung, daß der Wirbel durch eigene Einwirkung seine geometrische Gestalt nicht ändert. Für die meisten Rechnungen genügt es nun, die Wirbelader durch ihre Mittelkurve zu ersetzen, so daß die Punkte im Abstände $r = R$ von der

1) Dem letzten Wunsche meines am 29. April 1915 in Polen gefallenen Freundes Dr. Adolf Lauth entsprechend, veröffentliche ich hier diese als völlig druckfertiges Manuskript hinterlassene Arbeit; die Anwendung der in ihr gegebenen sehr einfachen Behandlungsweise gekrümmter Wirbel auf die Theorie der Propellerwirkung, die leider ein Fragment geblieben ist, soll an anderer Stelle erscheinen.

F. Krüger, Danzig-Langfuhr.

2) A. Gray, Phil. Mag. 163. p. 13. 1914.

Mittelkurve die Begrenzung der Wirbelader bilden. Auf diese Mittelkurve denkt man sich die Intensität der Wirbelader konzentriert, so daß die Zirkulation Γ um die Mittelkurve mit der Zirkulation um die Wirbelader übereinstimmt. Die Zirkulation Γ ist mit der Wirbelstärke identisch und nach Helmholtz über die ganze Wirbelader konstant.

Die Geschwindigkeitsverteilung um die Wirbelader entspricht bekanntlich dem magnetischen Feld um einen stromdurchflossenen linearen Leiter und wird für Punkte außerhalb der eigentlichen Wirbelader durch eine dem Biot-Savart'schen Gesetz entsprechende Formel bestimmt. Bedeutet $d\mathbf{s}$ der Größe und Richtung nach ein Element der Mittelkurve an der Stelle $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ und \mathbf{r} den Vektor von dem Element $d\mathbf{s}$ nach einem Punkt x, y, z , außerhalb der Wirbelader, so ist der in diesem Punkte durch das Wirbelelement allein hervorgerufene Beitrag zur Geschwindigkeit

$$\delta \mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[d\mathbf{s} \times \mathbf{r}]}{r^3},$$

wo r die absolute Größe von \mathbf{r} und $[d\mathbf{s} \times \mathbf{r}]$ das Vektorprodukt von $d\mathbf{s}$ und \mathbf{r} bezeichnet. Die Zerlegung von $\delta \mathbf{v}$ in seine Komponenten $\delta u, \delta v, \delta w$ ergibt

$$\delta u = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(\bar{y} - y) d\bar{z} - (\bar{z} - z) d\bar{y}}{r^3},$$

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(\bar{x} - x) d\bar{z} - (\bar{z} - z) d\bar{x}}{r^3},$$

$$\delta w = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(\bar{x} - x) d\bar{y} - (\bar{y} - y) d\bar{x}}{r^3},$$

$$[r^2 = (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2].$$

Durch Integration über alle Elemente der Mittelkurve erhält man die gesamte im Punkte (x, y, z) herrschende Geschwindigkeit und ihre Komponenten.

So ist für einen geradlinigen Wirbel die Mittelkurve eine gerade Linie, und es ergibt sich durch Ausführung der Integration über dieselbe für einen Punkt im Abstande $a > R$ von der Mittelkurve die Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

senkrecht zu der durch die Gerade und den Punkt gelegten Ebene. Wollte man dieses Gesetz auch für die Punkte im

Abstände $a < R$ gelten lassen, so käme man für $a = 0$ zu unendlich großen Geschwindigkeiten, was sicher nicht der Fall ist. In der Tat ist es unstatthaft, auch für Punkte in einer Entfernung $a < R$ von der Mittelkurve die Wirbelader auf ihre Mittelkurve zusammenzuziehen. Man kann dies wenigstens nur für die Teile der Mittelkurve tun, welche von dem betreffenden Punkt um mehr als den Querschnittsradius R der Wirbelader entfernt liegen. Meist hilft man sich nun in der Weise, daß man innerhalb der Wirbelader eine andere Stromfunktion und ein anderes Geschwindigkeitspotential annimmt¹⁾, welches eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Gamma a}{2\pi R^2}$$

liefert, wo wieder a den Abstand von der Mittelkurve bezeichnet und kleiner als R ist. An der Grenze der Wirbelader liefern beide Gesetze den Wert $\Gamma/2\pi R$ der Geschwindigkeit.

Direkt läßt sich dies auf gekrümmte Wirbel, wie Kreis- und Schraubenwirbel nicht übertragen. Für die Teile der Mittelkurve, welche um mehr als den Querschnittsradius R von der Wirbelader entfernt sind, kann man die Annahme beibehalten, daß die Wirbelader durch ihre Mittelkurve ersetzt wird und ein Element aus diesem Abschnitt der Wirbelader den Beitrag

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[d\mathfrak{s} \mathfrak{r}]}{r^3}$$

zur Geschwindigkeit liefert, wo \mathfrak{r} den Radiusvektor von $d\mathfrak{s}$ zu dem betreffenden Punkte bezeichnet und $r = |\mathfrak{r}|$ ist. Für $r < R$ ist dagegen die Zusammenziehung der Wirbelader auf ihre Mittelkurve nicht mehr statthaft und es tritt eine Änderung des Geschwindigkeitspotentials und der Stromfunktion ein.²⁾ Dieser Änderung entspricht nun wieder ein anderer Wert für die Geschwindigkeit, d. h. an Stelle der Beziehung

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[d\mathfrak{s} \mathfrak{r}]}{r^3} \quad (r > R)$$

hat ein Gesetz zu treten, welches für $r = R$ denselben Wert wie das angegebene liefert und für $r < R$ ähnlich wie beim

1) Vgl. H. Lamb, Hydrodynamik (deutsche Auflage), p. 270. 1907.

2) Vgl. H. Lamb, l. c. p. 281.

geradlinigen Wirbel womöglich einen linearen Abfall der Geschwindigkeit nach der Mitte zum Ausdruck bringt. Dieser Bedingung genügt die Beziehung

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[d\mathbf{s} \mathbf{r}]}{R^3} \quad (r < R)$$

da hier das Vektorprodukt $[d\mathbf{s} \mathbf{r}]$ mit r linear abfällt, wenn man auf ein und demselben Strahl von $d\mathbf{s}$ ausgeht. Nimmt man dieses Gesetz an, das wegen der Kleinheit von R nur in kleinem Bereich um $d\mathbf{s}$ gilt, so kann man die Wirbelader vollständig durch ihre Mittelkurve ersetzen, hat aber für

$r > R$ die Beziehung

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[d\mathbf{s} \mathbf{r}]}{r^3},$$

für $r < R$ die Beziehung

$$\delta v = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{[d\mathbf{s} \mathbf{r}]}{R^3},$$

so daß also eine kleine Kugel um das Element $d\mathbf{s}$ eine durch die Zusammenziehung der Wirbelader auf ihre Mittelkurve bedingte Ausnahmestellung einnimmt. An Stelle der Änderung der Stromfunktion und des Geschwindigkeitspotentials tritt so direkt die Änderung der Geschwindigkeit für $r < R$.

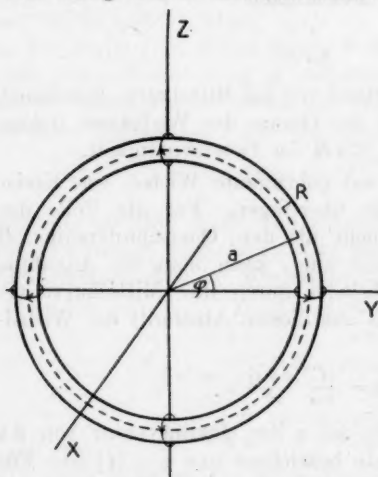


Fig. 1.

2. Eine erste Anwendung betrifft die Bestimmung der Geschwindigkeit eines Kreiswirbels (Fig. 1). Die Mittelkurve eines solchen Ringwirbels habe die Koordinaten

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = a \cos \varphi, \quad \bar{z} = a \sin \varphi.$$

Dann sind die Komponenten des Elementes $d\mathbf{s}$

$$d\bar{x} = 0, \quad d\bar{y} = -a \sin \varphi d\varphi = -\bar{z} d\varphi, \quad d\bar{z} = a \cos \varphi d\varphi = \bar{y} d\varphi,$$

und der Wirbel erteilt einem Flüssigkeitselement am Orte x, y, z eine Geschwindigkeit mit den Komponenten

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\bar{y} - y)\bar{y} + (\bar{z} - z)\bar{z}}{r^3} d\varphi,$$

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\bar{y} d\varphi}{r^3},$$

$$w = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\bar{z} d\varphi}{r^3}.$$

Insbesondere sind für den Punkt $x = 0, y = 0, z = 0$ in der Mitte des Kreiswirbels die Geschwindigkeitskomponenten $v_0 = 0, w_0 = 0$ und

$$u_0 = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{a} = \frac{\Gamma}{2a},$$

wo a der Radius des Kreises ist.

Aus Symmetriegründen haben alle Punkte der Mittelkurve dieselbe Geschwindigkeit, welche mit der Geschwindigkeit des Wirbels übereinstimmt. Nimmt man zu deren Bestimmung den Punkt mit den Koordinaten $x = 0, y = a, z = 0$, so ist für diesen $v = 0$ und $w = 0$, d. h. es besteht keine Geschwindigkeit, die den Wirbel erweitern oder um seinen Mittelpunkt drehen würde. Dagegen erhält die Geschwindigkeit in einer Richtung senkrecht zur Ebene des Wirbels nach der angegebenen Regel den Wert

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi R^3} \int_0^\varepsilon a^2(1 - \cos\varphi) d\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\varepsilon^\pi \frac{a^2(1 - \cos\varphi) d\varphi}{\{2a^2(1 - \cos\varphi)\}^{3/2}},$$

wo

$$\varepsilon = \frac{R}{a}$$

gesetzt werden kann, wenn R gegen a relativ klein ist. Das erste Integral gibt den Wert

$$\frac{\Gamma a^2}{2\pi R^3} (\varepsilon - \sin\varepsilon),$$

das zweite den Wert

$$\frac{\Gamma}{2\pi a} \int_\varepsilon^\pi \frac{d\varphi}{4 \sin \varphi/2} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \left[\lg \left(\tg \frac{\varphi}{4} \right) \right]_\varepsilon^\pi = - \frac{\Gamma}{4\pi a} \lg \left(\tg \frac{\varepsilon}{4} \right).$$

Mit Entwicklung von $\varepsilon - \sin \varepsilon$ und $\operatorname{tg} \varepsilon/4$ nach Potenzen von ε und Vernachlässigung höherer Potenzen der kleinen Größe ε folgt daraus

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{a^3}{R^3} \frac{\varepsilon^3}{6} + \frac{\Gamma}{4\pi a} \lg \frac{4}{\varepsilon}$$

oder mit Einsetzung des Wertes $\varepsilon = \frac{R}{a}$

$$(1) \quad u = \frac{\Gamma}{4\pi a} \left(\lg \frac{4a}{R} + \frac{1}{3} \right).$$

Um diesen Ausdruck mit dem von Lord Kelvin¹⁾ gefundenen Wert

$$\frac{\Gamma}{4\pi a} \left(\lg \frac{8a}{R} - \frac{1}{4} \right)$$

und mit dem von J. J. Thomson²⁾ angegebenen Wert vergleichen zu können, bedenke man, daß

$$\lg \frac{4a}{R} + \frac{1}{3} = \lg \frac{8a}{R} - \lg 2 + \frac{1}{3} = \lg \frac{8a}{R} - 0,35982 \dots$$

ist, daß also der gefundene Wert zwischen die beiden sonst bekannten fällt.

Aus dem Verhältnis von

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi a} \left(\lg \frac{4a}{R} + \frac{1}{3} \right)$$

zu der Geschwindigkeit

$$u_0 = \frac{\Gamma}{2a}$$

in der Mitte des Wirbels kann man auf die Gestalt der Atmosphäre schließen, welche den Wirbel begleitet. Ist

$$\lg \frac{4a}{R} + \frac{1}{3} > 2\pi,$$

also

$$\lg \frac{4a}{R} > 5,94986 = \lg 383,7$$

oder

$$a > 95,4 R,$$

d. h. der Radius a der Mittelkurve mehr als fast das Hundertfache des Querschnittsradius R der Wirbelader, wenn man von diesem eine scharf definierte Grenze annimmt, so strömt

1) Lord Kelvin, Math. and Phys. Papers 4. p. 67; Phil. Mag. 33. p. 511. 1867.

2) J. J. Thomson, Motion of Vortex Rings, p. 33. 1883.

die Flüssigkeit in der Mitte langsamer, als der Wirbel fortschreitet, und die den Wirbel begleitende Flüssigkeit oder Atmosphäre hat in der Mitte eine Öffnung. Für kleinere Werte von a/R hat die begleitende Atmosphäre in der Mitte keine Öffnung.¹⁾ Die Annahme, daß R/a sehr klein ist, wird daher meist den Verhältnissen entsprechen.

3. Da sich die Geschwindigkeit eines Kreiswirbels und dessen Abmessungen experimentell ermitteln lassen, so ist auch die Wirbelstärke Γ aus experimentellen Daten zu entnehmen. Dies dient zur Bestimmung eines Näherungswertes für den Widerstand, den ein Körper erfährt, hinter dem sich in der Zeiteinheit n Kreiswirbel vom Radius a ablösen. Den n Kreiswirbeln entspricht nämlich in ihrer Fortschreitungsrichtung ein Impuls vom Betrag

$$J = n \Gamma \rho a^2 \pi,$$

wo ρ die Dichte der Flüssigkeit bezeichnet, und dieser Zuwachs an vorhandenem Impuls bildet den wesentlichsten Teil des Flüssigkeitswiderstandes. Wenn der gegenseitige Abstand der Kreiswirbel nicht zu klein ist, kann man hier für Γ den angegebenen Wert einsetzen und so den Widerstand aus der Geschwindigkeit, der Zahl und den Abmessungen der entstehenden Kreiswirbel experimentell bestimmen. Das Korrekturglied, welches bei der Ausführung solcher Messungen hinzuzufügen wäre, rührt von weiteren Impulsänderungen infolge der Verschiedenheit der Strömung vor und hinter dem Hindernis her und ist bei nicht zu rasch aufeinander folgenden Wirbeln verhältnismäßig sehr klein, wie die nähere Rechnung zeigt.

4. Eine weitere Anwendung der auf p. 674 angegebenen Regel betrifft die Bestimmung der Geschwindigkeit eines Schraubenwirbels, dessen Mittelkurve die Koordinatendarstellung

$$\bar{x} = b \varphi, \quad \bar{y} = a \cos \varphi, \quad \bar{z} = a \sin \varphi$$

besitzen möge (Fig. 2). Die Ganghöhe des Schraubenwirbels hat den Wert

$$h = 2 b \pi = 2 a \pi \operatorname{tg} \alpha,$$

1) Vgl. H. Lamb, l. c. p. 283.

wo a den Steigungswinkel bezeichnet. Setzt man in die Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten die Werte

$$d\bar{x} = b d\varphi, \quad d\bar{y} = -a \sin \varphi d\varphi = -\bar{z} d\varphi, \\ d\bar{z} = a \cos \varphi d\varphi = \bar{y} d\varphi$$

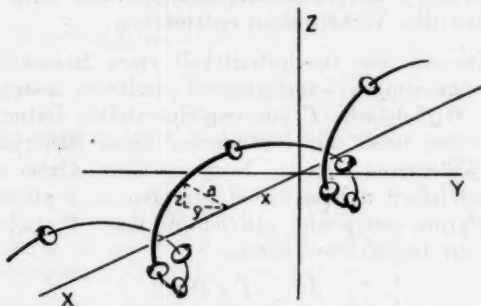


Fig. 2.

ein, so erhält die Geschwindigkeit für einen Punkt x, y, z außerhalb der Wirbelader die Komponenten

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2 - (y\bar{y} + z\bar{z})}{r^3} d\varphi, \\ v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\bar{z} - z) - (\bar{x} - x)\bar{y}}{r^3} d\varphi, \\ w = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\bar{y} - y) + (\bar{x} - x)\bar{z}}{r^3} d\varphi, \\ [r^2 = (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2 + (\bar{z} - z)^2].$$

Insbesondere ergibt sich für einen Punkt der Schraubenachse, etwa den Punkt $x = 0, y = 0, z = 0$, eine Geschwindigkeit, deren Komponente in der Achsenrichtung den Wert

$$u_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty \frac{a^2 d\varphi}{(a^2 + b^2 \varphi^2)^{3/2}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \left[\frac{\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \varphi^2}} \right]_0^\infty = \frac{\Gamma}{2\pi b} = \frac{\Gamma}{h}$$

besitzt.

Aus Symmetriegründen werden alle Punkte der Mittelkurve der Wirbelader gleiche axiale, radiale und tangential Geschwindigkeitskomponenten erhalten, und der Wirbel wird

nur dann mit Beibehaltung seiner geometrischen Form in axialer Richtung unter gleichzeitiger Drehung um die Schraubenachse fortschreiten, wenn für seine Wirbelader keine radiale Geschwindigkeit existiert. Dies ist in der Tat der Fall. Denn für den Punkt $x = 0$, $y = a$, $z = 0$ der Mittelkurve des Schraubenwirbels ist die radiale Geschwindigkeit mit v identisch und es wird

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{a b (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{r^3} d\varphi + \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{a b (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{r^3} d\varphi \\ + \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{a b (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{R^3} d\varphi,$$

da sich die Beiträge aus positiven und negativen Werten von φ aufheben. Somit bleibt der Schraubenwirbel unter Wahrung seiner geometrischen Gestalt auf demselben Kreiszylinder, wenn keine weiteren Einwirkungen hinzukommen.

Mit denselben Werten für x , y , z erhält man die axiale Fortschrittgsgeschwindigkeit des Schraubenwirbels

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \int_0^{\varepsilon} a^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{a^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2 (1 - \cos \varphi)\}^{3/2}},$$

wo für relativ kleine Werte von R der Winkel

$$\varepsilon = \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{R \cos \alpha}{a}$$

gesetzt werden kann. Unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ wird dann

$$u = \frac{\Gamma a^2}{12\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}}}^{\infty} \frac{a^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2 (1 - \cos \varphi)\}^{3/2}}.$$

Setzt man im zweiten Integral $\varphi = 2\psi$, so wird für $0 < \psi < \pi/2$ mit Entwicklung von ψ nach Potenzen von $\sin \psi$

$$\frac{a^2 (1 - \cos \varphi)}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2 (1 - \cos \varphi)\}^{3/2}} = \frac{a^2 \sin^2 \psi}{4 \{(a^2 + b^2) \sin^2 \psi + b^2/3 \sin^4 \psi \dots\}^{3/2}} \\ = \frac{a^2}{4 \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left\{ \frac{1}{\sin \psi} - \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \sin \psi \right\}.$$

Folglich wird, wieder mit Vernachlässigung höherer Potenzen

$$\begin{aligned} \text{von } \frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int_E^{\pi} \frac{a^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)\}^{3/2}} &= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \int_E^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin \psi} - \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \sin \psi \right) d\psi \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left[\lg \left(\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) + \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \cos \psi \right]_{\frac{R}{2\sqrt{a^2 + b^2}}}^{\pi/2} \\ &= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left[\lg \frac{4\sqrt{a^2 + b^2}}{R} - \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \right], \end{aligned}$$

oder mit Hinzunahme des schon gefundenen Gliedes

$$\begin{aligned} u &= \frac{\Gamma a^2}{4\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left[\lg \frac{4\sqrt{a^2 + b^2}}{R} + \frac{2a^2 - b^2}{6(a^2 + b^2)} \right] \\ &\quad + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{a^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)\}^{3/2}}, \end{aligned}$$

Hier ist das letztere Integral bei nicht zu kleinen Ganghöhen des Schraubenwirbels gegen den ersten Ausdruck mit dem logarithmischen Glied verhältnismäßig klein. Bringt man durch Reihenentwicklung den Cosinus in den Nenner, so sind die Koeffizienten von $\cos \varphi$, $\cos^2 \varphi$, $\cos^3 \varphi$, ... klein gegen das Absolutglied, und so wird näherungsweise

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{a^2 (1 - \cos \varphi) d\varphi}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)\}^{3/2}} &\sim \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{a^2 d\varphi}{(b^2 \varphi^2 + 2a^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a^2}{b^2 \pi^2}}} \right). \end{aligned}$$

Im ganzen erhält man den Näherungswert

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\Gamma a^2}{4\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left(\lg \frac{4\sqrt{a^2 + b^2}}{R} + \frac{2a^2 - b^2}{b(a^2 + b^2)} \right) \\ &\quad + \frac{\Gamma}{4\pi b} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a^2}{b^2 \pi^2}}} \right) \end{aligned} \right.$$

In derselben Weise wird die tangentielle Drehgeschwindigkeit des Schraubenwirbels

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\pi \frac{a b (1 - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi}{R^3} + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{a b (1 - \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi}{r^3}$$

$$= \frac{b}{a} \cdot u - \frac{\Gamma}{2\pi R^3} \int_0^\pi \frac{a b \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{a b \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{b^2 \varphi^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)}^{3/2}},$$

oder unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{R}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$w = \frac{b u}{a} - \frac{\Gamma a b}{6\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{a b \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sqrt{b^2 \varphi^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)}^{3/2}}.$$

Wie bei der Berechnung der axialen Geschwindigkeit wird für $\varphi = 2\psi$

$$\frac{(a b \varphi \sin \varphi)}{\{b^2 \varphi^2 + 2a^2(1 - \cos \varphi)\}^{3/2}} = \frac{a b \sin \psi \cos \psi \left(\sin \psi + \sin^3 \frac{\psi}{6} \dots \right)}{2 \left\{ (a^2 + b^2) \sin^2 \psi + \frac{b^3}{3} \sin^4 \psi \dots \right\}^{3/2}}$$

$$= \frac{a b \cos \psi}{2 \sqrt{(a^2 + b^2)^3} \sin \psi} \left[1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \right) \sin^2 \psi \dots \right].$$

Die Integration liefert

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{a b \varphi \sin \varphi d\varphi}{r^3}$$

$$= \frac{\Gamma a b}{2\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left[\lg(\sin \psi) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{6} - \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)} \right) \cos 2\psi \right] \frac{\pi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{\Gamma a b}{2\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left(\lg \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{R} + \frac{a^2 - 2b^2}{12(a^2 + b^2)} \right),$$

und so wird

$$w = \frac{\Gamma a b}{4\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left\{ -\lg \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{R} + \frac{1}{6} \right\}$$

$$+ \frac{\Gamma}{2\pi a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a^2}{b^2 \pi^2}}} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{a b \varphi \sin \varphi d\varphi}{r^3}.$$

Zur Bestimmung von

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{q \sin q \, dq}{\{b^2 q^2 + 2a^2(1 - \cos q)\}^{3/2}}$$

integriert man mehrmals partiell und erhält eine konvergente Reihe

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{q \sin q \, dq}{r^3} = \left[\frac{\sin q - q \cos q}{r^3} \right]_{\pi}^{\infty} + \left[(2 \cos q - q \sin q) \frac{d\left(\frac{1}{r^3}\right)}{dq} \right]_{\pi}^{\infty} \dots$$

in der entsprechend der Größe der übrigen Glieder in w , mit dem zweiten Glied abgebrochen werden kann. Damit bestimmt sich der Näherungswert

$$\frac{I}{2\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{a b q \sin q \, dq}{r^3} = - \frac{I a b}{2(b^2 \pi^2 + 4a^2)^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{6b^2}{b^2 \pi^2 + 4a^2} \right\}.$$

Die tangentielle Geschwindigkeit des Schraubenwirbels wird folglich

$$(3) \quad \left\{ w = \frac{I a b}{4\pi \sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \left\{ -\lg \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{R} + \frac{1}{6} \right\} + \frac{I}{4\pi a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2a^2}{b^2 \pi^2}}} \right) \right. \\ \left. + \frac{I a b}{2(b^2 \pi^2 + 4a^2)^{3/2}} \left(1 + \frac{6b^2}{b^2 \pi^2 + 4a^2} \right) \right\}.$$

Zieht man die Größe des logarithmischen Gliedes gegenüber den anderen in Betracht, so erkennt man, daß stets

$$|w| < \left| \frac{b u}{a} \right| = |u| \operatorname{tg} \alpha$$

ist, wo α den Steigungswinkel bezeichnet, d. h.: die Drehbewegung des Schraubenwirbels ist um so kleiner, je kleiner die Steigung der Schraube ist.

(Eingegangen 22. Februar 1916.)

**5. Die Übereinstimmung der als Reflexionstöne
oder Pfaundersche Töne bezeichneten Klang-
erscheinungen mit der Helmholtzschen
Resonanztheorie des Hörens;**

von F. A. Schulze.¹⁾

Einleitung.

In zwei Abhandlungen, deren Titel mit demjenigen der vorliegenden bis auf den Ersatz der Worte: Reflexionstöne oder Pfaundersche Töne durch: *Unterbrechungstöne* bzw. *Phasenwechseltöne* übereinstimmt, habe ich²⁾ gezeigt, daß — entgegen anderen, früheren Beobachtungen und Behauptungen — im allgemeinen nicht, wie es die von R. König, L. Hermann und anderen vertretenen Periodiktheorie des Hörens verlangen würde, bei regelmäßigen Unterbrechungen, Intensitätsschwankungen oder Phasenwechseln irgendeines primären Tones, ein Ton gehört wird, dessen Schwingungszahl gleich der sekundlichen Anzahl von Unterbrechungen, Intensitätsschwankungen oder Phasenwechsel des gegebenen Tones ist, sondern, daß die im allgemeinen recht komplizierten hierbei auftretenden Klangerscheinungen bzw. die in ihnen enthaltenen Töne verschiedener Höhe in vollem Einklang mit der Resonanztheorie des Hörens sind, so daß also die auf der behaupteten Existenz von Unterbrechungs- bzw. Phasenwechseltönen gegründeten Einwände gegen die Resonanztheorie hinfällig sind.

Außer diesen sog. Unterbrechungs- und Phasenwechseltönen blieb nun noch als Stütze der Periodiktheorie des Hörens, wonach irgendein periodisch das Ohr treffender Anstoß einen Ton von entsprechender Schwingungszahl als subjektive Ton-

1) Vorläufige Mitteilungen in Marburger Sitz.-Ber. 1913. p. 4ff. und 1915. p. 55ff.

2) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. **26**. p. 219. 1908; **45**. p. 283. 1914.

empfindung hervorrufen soll, eine als „*Reflexionstöne*“ bezeichnete Tonerscheinung übrig.

A. Baumgarten¹⁾ hat zuerst beobachtet, daß man, zwischen einem rauschenden Bach und einer 1—2 m davon entfernten Mauer stehend, aus dem Geräusch einen Ton heraushört, dessen Höhe bei Annäherung an die reflektierende Mauer ansteigt. Nach Baumgarten ist diese Erscheinung dadurch zu erklären, daß jeder Geräuschimpuls das Ohr zweimal trifft, einmal direkt, das zweite Mal nach der Reflexion. Die Wellenlänge des Tones müßte hiernach gleich dem Doppelten des Abstandes des Ohres von der Wand sein, was auch mit den Beobachtungen ganz gut übereinstimmt.

H. Starke²⁾ hat dieser Auffassung, die ganz auf dem Boden der Periodiktheorie des Hörens steht, eine andere mit der Resonanztheorie des Hörens in Einklang stehende Erklärung der Erscheinung gegenübergestellt. Danach sind in dem Geräusch bereits eine große Menge von Tönen verschiedener Höhe vorhanden, die eben das Geräusch zusammensetzen. Von diesen Tönen wird jedesmal derjenige besonders stark gehört, dessen durch Reflexion an der Mauer gebildete stehende Welle am Ohr des Beobachters einen Knotenpunkt hat. Danach wären also diese Töne nicht als „*Reflexionstöne*“, als subjektive Tonempfindungen, zu deuten, die im Sinne der Periodiktheorie durch zweimaligen Impuls an das Ohr durch den hin- und den zurückgehenden reflektierten Impuls des Geräusches entstehen sollten.³⁾

1) A. Baumgarten, Ber. d. Naturw.-med. Vereins in Innsbruck. Jahrg. 7. Heft 1, p. 116. 1886.

2) H. Starke, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 1908. p. 295.

3) Übrigens gebührt, wie ich nachträglich fand, die Priorität der Beobachtung dieser Töne N. Savart, der sie lange vor Baumgarten bereits im Jahre 1839 genau beschrieben und messend verfolgt hat (N. Savart, Pogg. Ann. 46. p. 458. 1839). Auch gibt Savart auf Grund von Messungen und Versuchen bereits die Erklärung in ganz derselben Weise wie H. Starke als Heraushören der in dem Geräusch enthaltenen Einzeltöne, indem das Ohr jedesmal denjenigen Ton stark hört, für den sich das Ohr gerade in einem Knoten der stehenden durch Reflexion erzeugten Welle befindet. Er zeigt auch, wie man so eine Klanganalyse ausführen kann. A. Seebeck hat (Pogg. Ann. 59. p. 177. 1843) diese Versuche dann nach der quantitativen Seite noch weitergeführt.

Kurze Zeit, nachdem Baumgarten seine Beobachtung veröffentlicht hatte, versuchte L. Pfaundler¹⁾, die Baumgartenschen Töne mit der Sirene nachzuahmen. Er brachte hierzu auf derselben Lochreihe zwei Blaseröhren an, von denen eine feststand, während die andere längs der Lochreihe bewegt werden konnte. Haben die beiden Anblaseröhre irgend-einen konstant bleibenden Abstand voneinander, so wird bei der Rotation der Lochscheibe jedes einzelne Loch zweimal hintereinander angeblasen und einen Stoß in die Luft senden, erst von der einen, dann von der anderen Anblaseröhre. Die Zeit zwischen diesen beiden Anstößen hängt von der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe und dem Abstand der beiden Anblaseröhre voneinander ab. Wir haben also in vollständiger Analogie zu der Entstehung der Reflexionstöne nach der Baumgartenschen Auffassung Luftstoßpaare von stets gleichem zeitlichen Abstand voneinander, die immer wieder von neuem das Ohr treffen. Je näher die beiden Anblaseröhre einander sind, desto kürzer ist die Zeit zwischen den beiden Anstößen, die jedes Loch der Lochscheibe beim Vorbeipassieren an den beiden Anblaseröhren in die Luft sendet, desto höher muß also nach der Baumgartenschen der Periodiktheorie der des Hörens entsprechenden Vorstellung der „Reflexionston“ sein. Nähert man also während der Rotation der Lochscheibe die beiden Anblaseröhren einander langsam stetig, so müßte auch der gehörte „Reflexionston“ entsprechend langsam stetig in die Höhe gehen. Dabei müßte es prinzipiell genügen, wenn nur ein einziges Stoßpaar das Ohr trifft. Die folgenden Luftstoßpaare würden immer nur dazu dienen, den Ton von neuem im Ohr anzuregen und ihm dadurch größere Empfindungsintensität zu geben. Man kommt damit dann auch auf die Frage nach der minimalen Zahl von Impulsen, die zur Hervorbringung einer Tonempfindung erforderlich sind. Nach Pfaundler (l. c. p. 564) kann man sich vorstellen, daß eine Folge von zwei Impulsen bereits genügt, damit wir einen Ton der entsprechenden Höhe, nach der Helmholtzschen Ausdrucksweise²⁾ „perzipieren“, so daß also der Sinneseindruck

1) L. Pfaundler, Sitz.-Ber. d. Wiener Akad., math.-naturw. Klasse 2. Abt. 76. p. 561. 1877.

2) H. v. Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. 4. Aufl. p. 107.

vorhanden war, aber zu schwach, um die Wahrnehmung ins Bewußtsein gelangen zu lassen; daß dann eine öftere Wiederholung dieses Impulspaares diesen Sinneseindruck steigert und so kräftigt, daß die Wahrnehmung ins Bewußtsein kommt, daß wir den Ton allmählich „apperzipieren“.

Nach Pfaundler war nun bei dem beschriebenen Sirenenversuch der dem Rohrabstand entsprechende Ton (der Baumgartensche „Reflexionston“) nicht deutlich wahrnehmbar, wurde es aber sofort, wenn man diesen Abstand variierte, wobei dann ganz analoge Tonbewegungen eintraten, wie nach Baumgartens Experiment bei Änderung des Abstandes des Ohres von der reflektierenden Wand. Der Ton, der nicht gehört wurde, solange seine Höhe konstant war, wurde durch die Veränderung der Tonhöhe hörbar.

Pfaundler glaubt aus der Baumgartenschen Beobachtung der Reflexionstöne sowie aus seinen eigenen eben beschriebenen Versuchen den Schluß ziehen zu dürfen, „daß im Minimum zwei Schallimpulse auf die mitschwingenden Teile des Ohres genügen können, um die Empfindung eines Tones hervorzurufen, und daß diese Empfindung durch rasche Wiederholung zum Bewußtsein gebracht werden kann“.

Allerdings sieht Pfaundler diese Schlußfolgerung noch nicht für ganz einwandfrei an, indem er auf die Unsicherheit hinweist, die sowohl bei den Baumgartenschen Beobachtungen wie bei seinen eigenen Versuchen durch das Hinzutreten der Obertöne gegeben ist, die sowohl im Geräusch des fließenden Wassers wie bei der Sirene vorhanden sind.

Außer Lochscheiben mit gleichmäßig verteilten Löchern hat Pfaundler auch solche mit unregelmäßig angeordneten Löchern benutzt und dabei den fraglichen Ton sehr deutlich gehört.

In dieser Form — an Lochscheiben mit unregelmäßig verteilten Löchern — hat L. Hermann¹⁾ vor einiger Zeit bei der Wichtigkeit der Erscheinung den Versuch wiederholt und findet dabei die Angaben Pfaunders vollkommen bestätigt. Bei langsamer Variierung des Abstandes zwischen fester und beweglicher Anblaseröhre tritt der „Reflexionston“ oder — wie L. Hermann ihn nennt — der „Pfaund-

1) L. Hermann, Arch. f. d. ges. Physiol. 146. p. 249. 1912.

lersche Ton“ neben dem allgemeinen Geräusch deutlich hervor. Bei seinen Versuchen hatte Hermann auf der Lochscheibe 8 unregelmäßig verteilte kleine Löcher (3,5 mm Durchmesser). Den Gedanken, daß vielleicht der gehörte Oberton ein objektiver harmonischer Oberton der Gesamtperiode (der Gesamtumdrehung) sein könne, weist Hermann mit der Bemerkung zurück, daß danach unter Umständen, die wohl einem seiner Versuche entsprechen, dieser der 72. Partialton sein müsse. Da Hermann diese Bemerkung mit einem Ausrufungszeichen versieht, ohne etwas hinzuzufügen, wird man annehmen müssen, daß er dies als ausgeschlossen betrachtete. Hermann schreibt am Schluß seiner Abhandlung: „Wer sich einmal von der Existenz der Pfaunderschen Töne überzeugt hat und somit zugeben muß, daß es eine Tonempfindung gibt, welche nicht auf Resonatorerregung beruhen kann, wird auch in der Annahme subjektiver Amplitudentöne (Differenz-, Unterbrechungs- und Phasenwechseltöne) nichts Bedenkliches mehr finden, und hierin liegt meiner Ansicht nach die große Bedeutung der hier erörterten Erscheinungen.“

Bei der großen Wichtigkeit der hierdurch wieder von neuem aufgeworfenen Grundfrage der Akustik, die bereits in dem bekannten Streit zwischen G. S. Ohm und A. Seebeck über den einer reinen Tonempfindung zugrunde liegenden objektiven Vorgang zur Diskussion stand, schien es mir angezeigt, diesen Versuch nochmals zu wiederholen.

In der Tat würde der einwandfreie Nachweis der Existenz von solchen subjektiven, nicht auf Resonatorerregung zurückführbaren Pfaunderschen Tönen von außerordentlicher Bedeutung und der Resonanztheorie des Hörens verhängnisvoll sein. Allerdings wäre hierdurch die Resonanztheorie keineswegs widerlegt; denn das Hören durch resonatorartig wirkende Gebilde im Ohr die auf objektiv in der Luft vorhandene sinusförmige Anteile von Schwingungen reagieren, kann ja *neben* diesen subjektiven auf irgend welche Impulsfolgen entsprechenden Tonempfindungen erfolgen, wie es wohl auch von manchen Anhängern der Periodiktheorie angenommen wird.

Gibt man aber einmal die Existenz dieser subjektiven Amplitudentöne zu, oder ist sie gar erwiesen, so ist es von hier aus ein kleiner Schritt zu der Anzweiflung oder Ablehnung der Resonanztheorie des Hörens überhaupt.

Im folgenden sei zunächst angegeben, welche Erscheinungen man bei der Pfaunderschen Versuchsanordnung nach der Resonanztheorie zu erwarten hat.

1. Theorie der nach der Resonanztheorie des Hörens zu erwartenden Klangerscheinungen.

Nach der Resonanztheorie des Hörens können bei der von Pfaundler benutzten Anordnung, wie beim Anblasen mit *einem* Rohr, auch beim Anblasen mit *zwei* um irgendeinen Winkel voneinander abstehenden Anblaseröhren nur der der Umdrehungszeit T entsprechende Ton von der Schwingungszahl $1/T$ sowie seine harmonischen Obertöne gehört werden, die auch objektiv vorhanden sein müssen. Denn wir haben einfach einen mit der Periode T sich stets periodisch wiederholenden Vorgang vor uns, der sich nach dem Fourierschen Theorem, wie auch die Luftbewegung in der Periode beschaffen ist, als Summe von Sinusschwingungen mit den Perioden $T, T/2, T/3, \dots$ darstellen läßt. Jedoch werden sich die Intensitäten der einzelnen Partialtöne mit dem Abstand der beiden Anblaseröhren ändern. Sie lassen sich unter vereinfachenden Annahmen folgendermaßen berechnen.

Die Löcher, die in Wirklichkeit kreisförmig waren, seien rechteckig; ihre Breite sei B . Die Amplitude der durchgehenden Luftbewegung sei für die ganze Dauer des Vorübergehens der Anblaseröhre vor einem Loch konstant $= 1$ gesetzt. Diese Annahme wird nicht ganz der Wirklichkeit entsprechen, da bei den im folgenden beschriebenen Versuchen die Löcher nicht rechteckig, sondern kreisförmig waren und der Durchmesser der ebenfalls kreisförmigen Anblaseöffnungen gegenüber den Löchern der Scheibe zwar wesentlich geringer, aber doch gegen diesen nicht zu vernachlässigen war. Die Amplitude des durch ein Loch gehenden Luftstromes nahm also zunächst stetig bis zu einem einige Zeit konstant anhaltenden Maximum zu, um dann symmetrisch zum Anstieg wieder auf Null abzunehmen.

Indessen wird unsere Annahme keinen erheblichen Fehler bedingen und jedenfalls das Typische des Vorganges unverändert lassen.

$t_1, t_2, \dots t_n$ seien, von einem willkürlichen Nullpunkt aus gezählt, die Zeiten, zu denen von dem *einen* Rohr der

Beginn der Luftstöße durch die n Löcher erfolgt. Für das andere Anblasrohr sind dann die entsprechenden Zeiten $t_1 + a$, $t_2 + a$, ... $t_n + a$, wo a vom Rohrabstand abhängt. Die allgemeine Zerlegung der in der Periode T vor sich gehenden Luftbewegung ist nach Fourier:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \left(\frac{k \cdot 2\pi t}{T} + \delta_k \right),$$

wobei

$$A_0 = \frac{1}{2} a_0, \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_k = \frac{a_k}{b_k}.$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt.$$

Nach unserer Annahme: $f(t) = 1$ an einem Loch, $f(t)$ im übrigen $= 0$, sind für das eine bzw. das zweite Anblasrohr, die durch ' bzw. '' unterschieden seien, wenn wir noch mit τ die Dauer eines einzelnen Luftstoßes durch ein Loch bezeichnen,

$$\tau = \frac{B}{U} \cdot T,$$

(wo U der Scheibenumfang an der Lochreihe ist),

$$a'_k = \frac{2}{T} \left\{ \int_{t_1}^{t_1+\tau} \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \int_{t_2}^{t_2+\tau} \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \dots + \int_{t_n}^{t_n+\tau} \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt \right\},$$

$$b'_k = \frac{2}{T} \left\{ \int_{t_1}^{t_1+\tau} \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \int_{t_2}^{t_2+\tau} \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \dots + \int_{t_n}^{t_n+\tau} \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt \right\};$$

$$a''_k = \frac{2}{T} \left\{ \int_{t_1+a}^{t_1+a+\tau} \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \int_{t_2+a}^{t_2+a+\tau} \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \dots + \int_{t_n+a}^{t_n+a+\tau} \cos \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt \right\},$$

$$b''_k = \frac{2}{T} \left\{ \int_{t_1+a}^{t_1+a+\tau} \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \int_{t_2+a}^{t_2+a+\tau} \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt + \dots + \int_{t_n+a}^{t_n+a+\tau} \sin \frac{k \cdot 2\pi t}{T} dt \right\},$$

oder

$$\begin{aligned}
 a_k' &= + \frac{1}{k\pi} \left\{ \left[\sin \frac{k 2\pi}{T} (t_1 + \tau) - \sin \frac{k 2\pi}{T} t_1 \right] + \left[\sin \frac{k 2\pi}{T} (t_2 + \tau) - \sin \frac{k 2\pi}{T} t_2 \right] + \dots + \left[\sin \frac{k 2\pi}{T} (t_n + \tau) - \sin \frac{k 2\pi}{T} t_n \right] \right\} \\
 &= + \frac{2}{k\pi} \sin k\pi \frac{\tau}{T} \left[\cos \frac{k 2\pi (t_1 + \tau/2)}{T} + \cos \frac{k 2\pi (t_2 + \tau/2)}{T} + \dots + \cos \frac{k 2\pi (t_n + \tau/2)}{T} \right], \\
 b_k' &= + \frac{2}{k\pi} \sin k\pi \frac{\tau}{T} \left[\sin \frac{k 2\pi (t_1 + \tau/2)}{T} + \sin \frac{k 2\pi (t_2 + \tau/2)}{T} + \dots + \sin \frac{k 2\pi (t_n + \tau/2)}{T} \right], \\
 a_k'' &= \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{T} \left[\cos \frac{k 2\pi (t_1 + \alpha + \tau/2)}{T} + \cos \frac{k 2\pi (t_2 + \alpha + \tau/2)}{T} + \dots + \cos \frac{k 2\pi (t_n + \alpha + \tau/2)}{T} \right], \\
 b_k'' &= \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi t}{T} \left[\sin \frac{k 2\pi (t_1 + \alpha + \tau/2)}{T} + \sin \frac{k 2\pi (t_2 + \alpha + \tau/2)}{T} + \dots + \sin \frac{k 2\pi (t_n + \alpha + \tau/2)}{T} \right],
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 a_k'' &= \cos \frac{k 2\pi \alpha}{T} a_k' - \sin \frac{k 2\pi \alpha}{T} b_k', \\
 b_k'' &= \sin \frac{k 2\pi \alpha}{T} a_k' + \cos \frac{k 2\pi \alpha}{T} b_k'.
 \end{aligned}$$

Beim Zusammenwirken beider Röhren ist $a_k = a_k' + a_k''$ und $b_k = b_k' + b_k''$. Die Intensität des k -ten Tones ist:

$$J_k = A_k^2 = a_k'^2 + b_k'^2 + a_k''^2 + b_k''^2 + 2(a_k' a_k'' + b_k' b_k'').$$

Da nun, wie leicht zu sehen und auch von vornherein selbstverständlich,

$$A_k'^2 = a_k'^2 + b_k'^2 = A_k''^2 = a_k''^2 + b_k''^2,$$

so ist

$$\begin{aligned}
 A_k^2 = J_k &= 2J_k' + 2(a_k' a_k'' + b_k' b_k'') = 2J_k' + 2 \cos \frac{2\pi k \alpha}{T} (a_k'^2 + b_k'^2) \\
 &= 2 \left(J_k' + \cos \frac{2\pi k \alpha}{T} J_k' \right)
 \end{aligned}$$

also

$$(1) \quad \underline{J_k = 4 \cos^2 \frac{k\pi \alpha}{T} J_k'}.$$

J_k' ist diejenige Intensität, die man erhält, wenn nur eine von den beiden Anblaseröhren wirksam ist, die „Einrohrintensität“ des k -ten Partialtones. Die Änderung, die diese erfährt, wenn noch das zweite Anblaserohr dazutritt, hängt hiernach ganz von der Größe a/T ab, d. h. von dem Verhältnis des Bogenabstandes der beiden Anblaserohre voneinander zur ganzen Peripherie bzw. zu demjenigen Peripherie-
 teil, der die ganze Periode umfaßt. Die größte Verstärkung, die der k -te Partialton gegenüber der „Einrohrintensität“ beim Hinzutritt des zweiten Anblaserohres erfährt, tritt ein für

$$\alpha = \frac{T}{k},$$

also für einen Ton, der übereinstimmt mit demjenigen Ton, der in diesem Fall auch nach der Periodiktheorie auftreten müßte. Für diese speziellen Stellungen der beiden Anblaserohre gegeneinander würden also beide Theorien, die Resonanztheorie und die Periodiktheorie, im wesentlichen dieselben Hörscheinungen liefern; eine Entscheidung ist für diese Stellungen nicht möglich. Anders jedoch für diejenigen Stellungen der beiden Anblaserohre zueinander, für welche T nicht ein ganzzahliges Vielfaches von a ist.

Nach der Resonanztheorie können auch beim Anblasen mit zwei Rohren nur der der Gesamtperiode T entsprechende Grundton, sowie seine harmonischen Obertöne gehört werden, also nur eine unetete Folge von Tönen, und zwar genau dieselben wie beim Anblasen mit nur einem Rohr, nur mit veränderter Intensität, wobei die „Zweirohrintensität“ J_k des k -ten Partialtones mit der „Einrohrintensität“ J_k' nach (1) zusammenhängt. Es werden nun aber stets, wie aus (1) direkt hervorgeht, immer gerade diejenigen Partialtöne in dem Gesamtklang gegenüber dem Anblasen mit einem Rohr besonders verstärkt werden und hervortreten, deren Tonhöhe nahe liegt demjenigen Ton, der nach der Periodiktheorie des Hörens zu erwarten wäre.

Sei z. B.

$$\frac{\alpha}{T} = \frac{2}{9};$$

der Verstärkungsfaktor

$$4 \cos^2 \frac{k\pi\alpha}{T},$$

der angibt, wievielmals der k -te Partialton beim Anblasen mit zwei Rohren stärker ist als bei Anblasen mit einem Rohr, ist dann durch folgende Tabelle gegeben:

Partialton k	1	2	3	4	5	6	7
Verstärkungsfaktor =	2,34	1,00	1,00	3,53	3,53	1,00	1,00

Es erscheinen also der 4. und 5. Partialton besonders verstärkt.

Sei der Grundton der ganzen Periode ($k = 1$) $c_1 = 258$ Doppelschwingungen. Die folgenden Partialtöne sind dann der Reihe nach $c_2, g_3, c_3, e_3, g_3, b_3$. Von diesen erscheinen also nach der Resonanztheorie besonders stark der 4. und 5. Partialton, c_3 und e_3 . Dem Rohrabstand

$$\frac{a}{T} = \frac{2}{9}$$

würde hingegen nach der Periodiktheorie der Ton von der Schwingungszahl

$$258 \cdot \frac{2}{9} = 1161 = d_3,$$

also ein gerade zwischen diesen beiden gelegener Ton entsprechen, der als subjektiver Ton gehört werden müßte.

Analog würde für

$$\frac{a}{T} = \frac{2}{17}$$

gelten:

	Partialton $k =$											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	Verstärkungsfaktor =											
	3,58	2,51	1,20	0,24	0,03	0,64	1,84	3,09	3,38	3,89	3,10	1,36

Nach der Resonanztheorie wären beim Grundton $c_1 = 258$ danach besonders verstärkt die harmonischen Obertöne $2064 = c_4$, $2922 = d_4$, $2580 = e_4$. Nach der Periodiktheorie wäre als subjektiver Ton zu erwarten der Ton

$$258 \cdot \frac{17}{2} = 2193 = cis_4,$$

also wieder ein Ton, der zwischen denjenigen harmonischen Partialtönen des Grundtones liegt, die besonders stark erscheinen. Und so ist es durchweg. Nähert man also den beweglichen Arm dem festen, so blitzen sozusagen aus dem alle Partialtöne enthaltenden Grundklang immer höhere und höhere Partialtöne besonders hervor, die dem jeweiligen, nach der Periodiktheorie zu erwartenden Ton sehr nahe liegen; bei weiterer Bewegung verschwinden sie wieder, während neue auftauchen. Durch die fortwährende Veränderung drängen sie

sich offenbar dem Ohr hierbei besonders auf; wie auch das Auge jede Veränderung in einem im übrigen mit ruhenden Gegenständen erfüllten Gesichtsfeld, also z. B. das Auffliegen eines Vogels, den es sonst gar nicht beachten würde, sofort merkt. Da nun die höheren harmonischen Obertöne einander so nahe liegen — der 8. und 9. Oberton unterscheiden sich ja nur um etwa einen ganzen Ton —, so gewinnt das Ohr bei nicht zu langsamer Bewegung des beweglichen Armes den Eindruck einer *stetigen* Tonänderung, wie sie die Periodiktheorie verlangen würde, während in Wirklichkeit stets nur die unetstetige Reihe der Partialtöne vorhanden ist; und ferner erscheint die Tonhöhe des stärksten Tones immer gerade derjenigen zu entsprechen, welche die Periodiktheorie fordert. Die beobachteten Klangerscheinungen ähneln also bei beiden Theorien einander sehr; nur eine genaue Analyse kann eine Entscheidung darüber treffen, welcher Theorie die Erscheinungen in Wirklichkeit entsprechen.

Man muß dazu für eine recht große Anzahl von Abständen der beiden Anblaserohre die gehörten Töne nach Höhe und Intensität feststellen. Dies ist in den im folgenden beschriebenen Versuchen geschehen.

Apparat.

Die Versuche wurden an dem in Fig. 1 abgebildeten, dem von Pfaundler benutzten ähnlichen Apparat ausgeführt. Auf einer vertikalen, in einem schweren Dreifuß eingelassenen Messingsäule befand sich eine mit ihr fest verbundene horizontale Messingröhre R_1 von ca. 18 cm Länge. Diese trug am vorderen Ende einen mit einer Strichmarke versehenen Arm A von ca. 6 cm Länge, auf der anderen Seite das in einer Klemmbacke K verschiebbare Anblaserohr B_1 , an welches die ca. 6 cm lange Düse D_1 mit 3 mm Öffnung angeschraubt war. In dem Rohr R_1 bewegte sich mit sanfter Reibung ein mit ihm konzentrisches Rohr. Dieses verjüngte sich auf der vorderen Seite zu dem Schlauchansatz S , auf der anderen geschlossenen Seite trug es das Anblaserohr B_2 , welches mit vier in verschiedenen Abständen angebrachten, mit Verschlußschrauben verschließbaren Löchern versehen war, in die nach Wahl die Anblasedüse D_2 (entsprechend D_1) eingeschraubt werden konnte. Mit dem Griff G konnte dieses Rohr gedreht und

so das Anblaserohr B_2 in beliebigem Winkel gegen das feste Anblaserohr B_1 eingestellt werden. Um diesen Winkel genau bestimmen zu können, war mit dem beweglichen inneren Rohr noch ein Teilkreis T mit Gradeinteilung verbunden, der die Drehung des Rohres mitmachte und sich vor der am Arm A angebrachten Strichmarke vorbei bewegte.

Um das bewegliche Rohr auf bestimmte Stellungen fest einstellen oder auch seine Drehung mit irgendeinem ge-

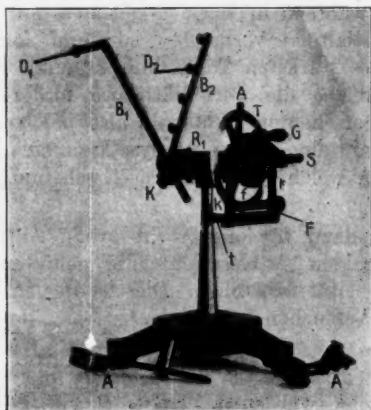


Fig. 1.

wünschten Grad von Reibung vor sich gehen lassen zu können, war an ihm noch eine Scheibe S mit einer Nute angebracht, in die von beiden Seiten her die zwei feststehenden Klemmbacken k eingriffen, die durch eine Feder F mehr oder weniger fest an die Scheibe S angepreßt werden konnten. Diese Vorrichtung war an der vertikalen Messingsäule durch einen horizontalen Arm t befestigt.

Auf der Fig. 1 sind neben dem Apparat noch zwei auf ihm an Stelle der Anblaserohre B_1 und B_2 anzubringende Arme A mit einschraubbaren Blättchen sichtbar; diese wurden gebraucht, wenn der Apparat anstatt an einer Lochsirene bei einer Zahnradsirene benutzt werden sollte.

Vor der Anblasedüse befand sich die Lochreihe der Lochscheibe, welche auf die Achse eines mit vollkommen konstanter

Spannung (20 Volt) betriebenen, in der Tourenzahl mit Vorschaltwiderständen regulierbaren Elektromotors aufgesetzt war. Die vier Quadranten der Scheibe enthielten je acht möglichst unregelmäßig verteilte Löcher, so zwar, daß die Anordnung auf jedem Quadranten dieselbe war, und also ein Quadrant bereits der Periode des ganzen Vorganges entsprach.

Die Winkelabstände der aufeinander folgenden Löcher voneinander betrugen: $13,5^{\circ}$, $7,0^{\circ}$, $15,0^{\circ}$, $9,0^{\circ}$, $6,5^{\circ}$, $9,0^{\circ}$, $8,0^{\circ}$, $22,0^{\circ}$. Der Durchmesser der Löcher betrug 5 mm, ihr Abstand von dem Scheibenmittelpunkt 14 cm; sie befanden sich 1 cm von dem Scheibenrand entfernt. Das Anblasen geschah mit Preßluft, die unter Zwischenschaltung eines Reduzierventils mit Hahn durch Vermittlung eines T-Stückes beide Anblaseröhren speiste. Es ließ sich ein Anblasestrom von sehr konstanter Geschwindigkeit leicht erzielen.

Der jeweilige Winkelabstand der Anblaseröhre konnte an dem Teilkreis genau abgelesen und leicht variiert werden. Wie schon Pfaundler beschreibt (und im Sinne seiner Anschauung begründet), hört man beim Bewegen der einen Anblaseröhre außer dem allgemeinen Grundgeräusch mit einem der Periode entsprechenden Grundton, wenn man den Rohrabstand von sehr kleinem Abstand vergrößert, einen veränderlichen, hoch anfangenden Ton, der dann bis zur Oktave des Grundtones sinkt, wenn der Rohrabstand genau die Hälfte der Periode (hier also 45°) beträgt. Bei weiterer Entfernung des beweglichen Armes steigt dann der Ton wieder in große Höhen, bis der Abstand der Arme eine volle Periode (90°) geworden ist. Dies wiederholt sich dann bei jeder Periode, also hier viermal bei einer vollen Umdrehung der Lochscheibe.

Aus den zahlreichen Versuchen, die alle prinzipiell dasselbe Resultat ergeben haben, sei eine beliebig herausgegriffene Versuchsreihe hier mitgeteilt.

Die mit einem Tourenzähler gemessenen Tourenzahl der Lochscheibe betrug 30,5 Umdr./Sek. Mit einer auf derselben Achse befindlichen Lochscheibe von 32 Löchern wurde diese Zahl kontrolliert, indem der beim Anblasen dieser Scheibe entstehende Ton (nach dem Gehör durch Intervallvergleich mit einer Normalstimmgabel, wobei eine Genauigkeit von etwa 3 Proz. möglich war, sowie durch Abhören mit einem

geeichten Zylinderresonator¹⁾) festgestellt wurde. Es ergab sich der Ton $h_2 = 976,5$ Doppelschwingungen, wonach sich die Tourenzahl ebenfalls ergab zu $976,5 : 32 = 30,5$. Es wurden die Töne sowohl mit wie ohne Resonator aufgesucht. Es ergab sich bei allen gehörten Tönen, daß sie an verschiedenen Stellen des Zimmers in verschiedener Stärke gehört wurden, offenbar je nachdem sich das Ohr im Knoten oder im Bauch der für den betreffenden Ton durch Reflexion an der Wand sich ausbildenden stehenden Welle befand. Es fand dies für sämtliche gehörten Töne statt, so daß damit auch ihr objektives Vorhandensein festgestellt war.

In der folgenden Tabelle enthält die erste Kolonne den Winkelabstand der beiden Anblaserohre in Graden. Der größte Abstand beträgt 90° , da sich vier volle Perioden auf der Scheibe befanden.

Die zweite Kolonne gibt das Verhältnis T/a der ganzen Periode (90°) zum Winkelabstand der Anblaserohre, wobei in leicht ersichtlicher Weise für dieses Verhältnis zwei Werte anzugeben sind.

In der dritten Kolonne sind die gehörten Töne angegeben; ihre Intensität ist durch untergesetzte Striche gekennzeichnet. Die Zahl der Striche ist dabei ein Maß für die Größe der Intensität. Natürlich ist hierbei eine gewisse Willkür vorhanden. In Klammer ist die Ordnungszahl des Partialtones geschrieben, welchem der gehörte Ton entspricht.

Die vierte Kolonne gibt diejenigen Partialtöne des Klanges, die nach der Resonanztheorie nach (1) mit besonders großer Intensität zu erwarten waren.

Die fünfte Kolonne endlich gibt die von der Periodiktheorie geforderten Töne. Es sind dabei zwei Töne angegeben.

Nach der Periodiktheorie ist nämlich der zu erwartende Ton bei der gegebenen Anordnung nicht eindeutig bestimmt. Innerhalb einer Periode, die durch AB gegeben sei, und in der die beiden Anblaserohre momentan an den Stellen A und C sich befinden mögen, kann nämlich, wie leicht zu sehen, die uns für den erwarteten Ton maßgebende Periode entweder AC oder das größere Zeitintervall CB sein. Von vorneherein

1) Benutzt wurden die von K. L. Schaefer (Beitr. z. Anat., Physiol. u. Ther. d. Ohres usw., herausg. von Passow und Schaefer, 3. p. 132. 1910) angegebenen Resonatoren, die im Gebrauch sehr bequem sind.

ist kein besonderer Grund für die Bevorzugung einer der beiden Perioden vor der anderen vorhanden. Im allgemeinen ist wohl das kleinere Zeitintervall als maßgebend betrachtet.

Übrigens könnte man, selbst vom Standpunkt der Periodiktheorie aus, zweifeln, ob ein Ton zu erwarten ist, wenn die Zeit zwischen den zwei Impulsen, die durch dasselbe Scheibenloch von den beiden Anblaseröhren gegeben werden und die den Anlaß zur Entstehung des „Reflexionstones“ bilden sollen, größer ist als die Zeit zwischen zwei Impulsen, die von *einem* Rohr beim Vorübergang vor zwei benachbarten Löchern gegeben werden, so daß sich innerhalb des erstgenannten Impulsintervalles noch ein oder mehrere Impulse einschieben. Im folgenden sind diese beiden „Periodiktöne“ berücksichtigt.

Bis zu einem gewissen Grad bleibt die Angabe des Winkelabstandes der beiden Anblaseröhre um eine kleine additive Größe unbestimmt, da man bei der endlichen Weite der Anblaseröhre sowohl wie der Löcher nicht mit Genauigkeit angeben kann, wo die Nullage angenommen werden soll. (Vgl. p. 698 bis 701.)

An diesem Beobachtungsmaterial ist zunächst zu erkennen, daß, wie es der Resonanztheorie entspricht, im Gegensatz zur Periodiktheorie *nur der der betreffenden Periode entsprechende Grundton H und seine harmonischen Obertöne* gehört wurden. Besonders tritt dies hervor bei den tieferen Partialtönen, die weit auseinanderliegen, bis etwa zum 6. Partialton hin. Bei den Partialtönen höherer Ordnung, die nahe beieinander liegen, tritt dies naturgemäß weniger deutlich hervor, zumal die Intervallschätzungsfähigkeit ja nur etwa $\frac{1}{2}$, allenfalls $\frac{1}{4}$ Ton beträgt. Es ist darum auch z. B. der gehörte Ton gis_3 als 14. Partialton gedeutet worden, trotzdem dieser eigentlich zwischen gis_3 und a_3 liegt; der Intervallunterschied von $\frac{1}{4}$ Ton war eben nicht mehr mit Sicherheit zu erkennen. Jedenfalls ist aber mit Bestimmtheit zu behaupten, daß in dem Bereich bis etwa zum 7. Partialton, in dem vollständige Sicherheit der Tonhöschätzung in der angegebenen Weise möglich war, Töne, deren Schwingungszahl nicht einem der Partialtöne entsprach, auch nicht spurenweise gehört wurden. Um das Ohr hierbei in der Aufsuchung solcher Töne zu unterstützen, wurde der Zylinderresonator auf den betreffenden, in der Partialtonreihe nicht enthaltenen Ton eingestellt, etwa

Abstand α der Anblasen- röhren in Graden	Verhältnis T/α der ganzen Periode zum Abstand der Anblaserröhren	Gehörte Töne	Nach der Resonanz- theorie besonders verstärkt zu erwarten die Partialtöne	Nach der Periodiktheorie zu erwarten
2,25	40,0	1,03	$H(1) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{gis}_2(27) \ \underline{b}_2(30)$	$h, \ \underline{dis}_2$
3	30,0	1,04	$H(1) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{gis}_2(27) \ \underline{b}_2(30)$	$c-h, \ b_4$
4	22,5	1,03	$H(1) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{gis}_2(24)$	$c, \ h_4$
5	18,0	1,06	$H(1) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{gis}_2(20)$	$c, \ \underline{cis}_4$
6	15,0	1,07	$H(1) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{gis}_2(16)$	$c, \ b_6$
7	12,9	1,09	$h_1(4) \ h_2(8) \ \underline{cis}_2(9) \ \underline{dis}_2(10) \ \underline{gis}_2(14)$	$c, \ g, -\underline{gis}_2$
8	11,3	1,10	$h_2(8) \ \underline{cis}_2(9) \ \underline{dis}_2(10)$	$c-\underline{cis}, \ f_8$
9	10,0	1,11	$\underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{cis}_2(9) \ \underline{dis}_2(10)$	$\underline{cis}, \ \underline{dis}_6$
10	9,0	1,12	$\underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{cis}_2(9)$	$\underline{cis}, \ \underline{cis}_8$
11	8,2	1,14	$\underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{cis}_2(9)$	$\underline{cis}, \ h_8-c_8$
12	7,5	1,15	$\underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{dis}_2(10) \ \underline{fis}_2(12)$	$\underline{cis}-d, \ b_8$
13	7,0	1,17	$\underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{dis}_2(10)$	$d, \ \underline{gis}_2-a_2$
14	6,4	1,19	$\underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8) \ \underline{dis}_2(10)$	$d, \ \underline{fis}_2-g_2$
15	6,0	1,20	$H(1) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8)$	$d, \ \underline{fis}_2$
16	5,6	1,22	$h(2) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6) \ \underline{h}_2(8)$	$d, \ f_2$
18	5,0	1,25	$h(2) \ h_1(4) \ \underline{dis}_2(5) \ \underline{fis}_2(6)$	$\underline{dis}, \ \underline{dis}_2$

Abstand α der Anblas- röhren in Grad	Verhältnis T/α der ganzen Periode zum Abstand der Anblasröhren	Gehörte Töne					Nach der Resonanz- theorie besonders verstärkt zu erwarten die Partialtöne	Nach der Periodiktheorie zu erwarten
18	5,0 1,25	h (2)	h_1 (4)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)		4, 5, 6,	dis, dis_2
19	4,7 1,27	H (1)	h (2)	h_1 (4)	dis_2 (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	$dis - e, cis_2 - d_2$
21	4,3 1,30	h (2)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	cis_2 (9)	4, 5, 8, 9	$dis - e, e_2$
22,5	4,0 1,33	h (2)	h_1 (4)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	4, 5, 8, 9	e, h_1
23	3,9 1,34	h (2)	h_1 (4)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	4, 5, 8	$e, b_1 - h_1$
25	3,6 1,38	h (2)	h_1 (4)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	h_2 (8)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (10)	4, 5, 7, 8, 10, 14	f, a_1
27	3,3 1,43	h (2)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (10)	$\underline{\underline{gis_2}}$ (14)			3, 7, 10, 13, 14	f, gis_1
29	3,1 1,47	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (3)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	cis_2 (9)	3, 6, 9, 10	$\underline{\underline{fis}}, \underline{\underline{fis_1}} - \underline{\underline{gis_1}}$
30	3,0 1,50	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (3)	h_1 (4)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	3, 6, 9, 10	$\underline{\underline{fis}}, \underline{\underline{fis_1}}$
31	2,9 1,53	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (3)	h_2 (8)	cis_2 (9)		3, 6, 8, 9	$\underline{\underline{fis}} - g, > f_1$
33	2,7 1,58	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (3)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)		3, 5, 6, 8	$g, > e_1$
35	2,6 1,63	h_2 (2)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (10)	5, 8, 10	$g - gis_1, dis_1$
37	2,4 1,69	h (2)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	b_2 (15)	5, 7, 10	$gis, > d_1$
39	2,3 1,76	h (2)	$\underline{\underline{dis_2}}$ (5)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	cis_2 (9)		5, 9	a, cis_1
41	2,2 1,84	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	$\underline{\underline{cis_2}}$ (9)			2, 9	$a - h, < cis_1$
43	2,1 1,92	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)			2, 4, 6	b, e_1
45	2,0 2,0	h (2)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (3)	h_1 (4)	$\underline{\underline{fis_2}}$ (6)	h_2 (8)	2, 4, 6, 8, 10, 12	h, h

Abstand α der Anblas- röhren in Graden	Verhältnis T/α der ganzen Periode zum Abstand der Anblaserröhren	Gehörte Töne	Nach der Resonanz- theorie besonders verstärkt zu erwarten die Partialtöne	Nach der Periodiktheorie zu erwarten	
46	1,96	2,05	$\underline{h}(2)$ $\underline{h}_1(4)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{dis}_2(10)$ $\underline{fis}_2(12)$	2, 4, 6, 8, 10, 12	$< h, > h$
48	1,87	2,14	$\underline{h}(2)$ $\underline{h}_1(4)$ $\underline{fis}(5)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{fis}_2(12)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{b}_2(15)$	2, 8, 12, 15	b, c_1
50	1,80	2,3	$\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{dis}_2(10)$ $\underline{e}_2-f_2(11)$	2, 6, 9, 11	a, cis_1
52	1,73	2,4	$\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{dis}_2(10)$ $\underline{e}-f_2(11)$ $\underline{gis}_2(14)$	5, 7, 9, 10, 14	$gis-a, d_1$
54	1,67	2,5	$\underline{dis}_2(5)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{fis}_2(12)$ $\underline{h}_2(16)$ $\underline{cis}_2(18)$ $\underline{e}_4(21)$	5, 8, 12, 16, 20	gis, dis_1
56	1,61	2,7	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{dis}_2(5)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{dis}_2(10)$ $\underline{e}_2-f_2(11)$ $\underline{b}_2(15)$	5, 8, 11	g, e_1
58	1,55	2,8	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{dis}_2(5)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{dis}_2(10)$ $\underline{b}_2(15)$	3, 5, 6, 8	g, f_1
60	1,50	3,0	$\underline{fis}_2(8)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{fis}_2(12)$ $\underline{cis}_2(18)$ $\underline{dis}_2(20)$	3, 6, 9, 12, 15, 18	$\underline{fis}, \underline{fis}_1$
62	1,45	3,2	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{f}_2(11)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{b}_2(15)$	3, 13, 16	f, g_1
64	1,41	3,5	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{e}_2-f_2(11)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{b}_2(15)$	7, 14	f, \underline{gis}_1-a_1
66	1,36	3,8	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{e}_2-f_2(11)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{b}_2(15)$ $\underline{h}_2(16)$	4, 8, 11, 15	e, b_1
68	1,32	4,1	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{e}_2-f_2(11)$ $\underline{gis}_2(14)$	4, 8, 12	e, h_1-c_2
70	1,29	4,5	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{dis}_2(5)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{dis}_2(10)$ $\underline{fis}_2(12)$	4, 9, 18	$\underline{dis}-e, \underline{cis}_2$
72	1,25	5,0	$\underline{dis}_2(5)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{b}_2(15)$ $\underline{cis}_2(18)$	5, 10, 15	$\underline{dis}, \underline{dis}_1$
74	1,22	5,6	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{dis}_2(5)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{cis}_2(18)$	5, 6, 11, 18	d, f_2
76	1,19	6,4	$\underline{h}_1(4)$ $\underline{dis}_2(5)$ $\underline{fis}_2(6)$ $\underline{h}_2(8)$ $\underline{gis}_2(14)$ $\underline{b}_2(15)$ $\underline{cis}_2(18)$	5, 6, 7, 8, 13, 14, 18, 19	d, g_2

Abstand α der Anblas- röhren in Graden	Verhältnis T/α der ganzen Periode zum Abstand der Anblasröhren	Gehörte Töne	Nach der Resonanz- theorie besonders verstärkt zu erwarten die Partialtöne	Nach der Periodiktheorie zu erwarten
78	1,15	7,5	6, 7, 8, 14, 15, 21	$cis-d, b_1$
80	1,12	9,0	8, 9, 10	cis, cis_2
81	1,11	10,0	8, 9, 10, 11, 12	cis, dis_3
82	1,10	11,3	10, 11, 12, 21, 22, 23	cis, f_8
84	1,07	15	13, 14, 15, 16	c, b_3
85	1,06	18	14-22	c, cis_4
86	1,05	22,5	14-20	c, f_4
87	1,04	30	—	$H-c, b_4$
88	1,02	45	—	$H-c, gis_6$
90	1,00	—	—	$(H), (\infty)$

auf e_2 oder e_3 , der Resonator ans Ohr gehalten und dann langsam wieder vom Ohr entfernt, während dabei der Abstand der Anblaseröhre langsam verändert wurde. Es war aber auch so bei keiner einzigen Stellung der Anblaseröhre zueinander von solchen Tönen auch nur eine Spur zu hören. Vor allem ist es wichtig, daß der Ton auch nicht bei demjenigen Winkelabstand der Anblaseröhre gehört wurde, bei dem er nach der Periodiktheorie hätte auftreten müssen. Z. B. hätte danach der Ton a_1 bei 25° Rohrabstand, der Ton c_1 bei 43° Rohrabstand gehört werden sollen, was eben nicht der Fall war. Bei einigen Winkelabständen der Anblaseröhre wurden Töne gehört, die bei flüchtiger Beobachtung den Forderungen der Periodiktheorie zu entsprechen schienen. So hatte es z. B. den Anschein, als ob bei Winkelabstand 36° der in der Partialtonreihe nicht enthaltene Ton dis_1 gehört wurde; besonders schien dies auffällig, wenn der Rohrabstand mit mäßiger Geschwindigkeit von über 45° auf unter $22,5^\circ$ geändert wurde. Man hatte dann den Eindruck, nacheinander die Dreiklangtöne h , dis_1 , fis_1 , h_1 zu hören. Bei genauerer Untersuchung stellte sich aber heraus, daß der bei ca. 36° Rohrabstand gehörte Ton nicht der Ton dis_1 , sondern seine nächsthöhere Oktave dis_2 war, ein Ton, der nun wieder in der Partialtonreihe enthalten ist. Dieser Ton dis_2 muß als 5. Partialton des Klanges bei diesem Rohrabstand nach der erhaltenen Intensitätsformel

$$J_k = 4 \cos^2 \frac{k \pi \alpha}{T} J'_k$$

bei diesem Rohrabstand mit erheblicher Intensität erscheinen, da danach J_5 ein Maximum hat an den Stellen $\alpha/T = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$, also bei $0^\circ, 18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, 72^\circ, 90^\circ$. Eine Fehlschätzung in der Höhe der Oktave entspricht ja einer bekannten Eigenschaft des Ohres.

Ferner entsprechen nun aber auch die Intensitätsverhältnisse der gehörten Partialtöne ganz den Folgerungen, die man aus der Resonanztheorie des Hörens ziehen kann. Nach Formel (1) ist die Intensität des k -ten Partialtones

$$J_k = 4 \cos^2 \frac{k \pi \alpha}{T} J'_k.$$

Es sind danach beim Anblasen mit zwei Rohren bei einem bestimmten Rohrabstand α gegenüber der Intensität beim An-

blasen mit *einem* Rohr besonders verstärkt diejenigen Partialtöne, für welche die Ordnungszahl k ganz oder nahezu die Bedingung erfüllt:

$$k = 1 \frac{T}{a}, 2 \frac{T}{a}, 3 \frac{T}{a} \dots$$

(wo T der der Periode entsprechende Winkel ist), während diejenigen Partialtöne, für welche die Ordnungszahl k' ganz oder nahezu die Bedingung

$$k' = \frac{1}{2} \frac{T}{a}, \frac{3}{2} \frac{T}{a}, \frac{5}{2} \frac{T}{a}, \dots$$

erfüllt, gegenüber der „Einrohrintensität“ in ihrer Intensität besonders stark geschwächt sind. Mit den in der zweiten Kolonne angegebenen Werten von T/a sind danach diejenigen, in der vierten Kolonne angeführten, Partialtöne angegeben, die beim Anblasen mit zwei Rohren besonders verstärkt erscheinen mußten. Wie man aus den mitgeteilten Versuchen sieht, stimmen die in der dritten Kolonne angegebenen „Gehörten Töne“ im allgemeinen gut mit den hiernach als besonders verstärkt zu erwartenden, in der vierten Kolonne angegebenen Partialtönen überein. Natürlich ist eine vollständige Übereinstimmung nicht zu erwarten.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß das starke Hervortreten einzelner Partialtöne sich meist, im Einklang mit der Resonanztheorie, über ein gewisses Rohrabstandsgebiet erstreckt und nicht auf einen ganz bestimmten Rohrabstand beschränkt ist. Z. B. ist der 5. Partialton bei $a = 2,25^\circ$ sehr stark, nimmt dann an Intensität allmählich ab, ist bei 7° verschwunden, erscheint bei 10° wieder, ist bei 11° und 12° sehr stark, nimmt an Stärke wieder ab bei 14° , wird dann wieder stark mit Maximum bei 18° , um dann an Intensität wieder abzunehmen; bei 27° ist er verschwunden, taucht bei 30° wieder auf, ist am stärksten bei 37° , verschwindet dann wieder, usw.

Nach der Resonanztheorie liegen in Übereinstimmung hiermit die Maxima des 5. Partialtones bei $0^\circ, 18^\circ, 36^\circ, 54^\circ, \dots$, die Minima bei $9^\circ, 27^\circ, 45^\circ, \dots$.

Bei ganz geringen Rohrabständen findet keine vollkommene Übereinstimmung mehr statt. Bei 6° Rohrabstand fand sich

z. B. der 16. Partialton statt des 15. besonders verstärkt. Dies liegt jedoch zweifellos an der schon hervorgehobenen Unsicherheit darüber, von wo aus bei der endlichen Breite der Löcher die Abstandszählung zu beginnen hat. Diese Unbestimmtheit würde ja übrigens auch die Periodiktheorie treffen.

Bemerkt sei noch ausdrücklich, daß alle Töne ohne Resonatoren gehört wurden, sich aber durch Resonatoren verstärken ließen, also objektiv im Klang enthalten waren.

Da man bei solchen Versuchen, bei denen es sich um subjektive Befunde handelt, leicht einer Täuschung oder auch einer Selbstsuggestion ausgesetzt ist, ist es mir besonders wertvoll, daß auch Hr. Prof. F. Richarz, Hr. Prof. R. H. Weber und Hr. Dr. F. Strieder, die auf meine Bitte die Freundlichkeit hatten, die Klangerscheinungen anzuhören, mir das un stetige Verhalten der gehörten Töne bestätigten.

Auf Grund dieser Versuche darf wohl die Folgerung ausgesprochen werden:

Die bei der Pfaunderschen Anordnung zur Herstellung der Reflexionstöne gehörten Klangerscheinungen entsprechen bis in alle Einzelheiten den nach der Resonanztheorie des Hörens zu erwartenden Tönen, während sie den Folgerungen der Periodiktheorie widersprechen. Das Ohr verhält sich wie ein Satz von Resonatoren.

Es gibt also keine als „Reflexionstöne“ zu bezeichnenden subjektiven Tonempfindungen.

Hiermit entfällt auch die weitere Folgerung, die Pfaundler (l. c.) aus seinen Versuchen gezogen hatte, daß nämlich zwei Impulse zur Perception eines Tones genügen. Der Satz selbst könnte richtig sein; nur ist diese Versuchsanordnung nicht geeignet, ihn zu beweisen.

Anhang.

Seebecksche Töne.

Im Anschluß hieran seien noch Versuche mitgeteilt über gewisse Klangerscheinungen, die bereits lange Zeit vor Aufstellung der sog. Reflexionstöne durch Baumgarten, Pfaund-

ler und Hermann von A. Seebeck¹⁾ beschrieben sind und im engsten Zusammenhang mit dem im vorigen eingehend besprochenen sog. „Reflexionstönen“ stehen, ja im Grunde auf dieselbe Weise und in analoger, nur etwas einfacherer, nicht so vielfältig variierbarer Anordnung hervorgebracht werden, wie die sog. Reflexionstöne in der Pfaunderschen Anordnung. In der zitierten Abhandlung beschreibt A. Seebeck folgende Versuche und Erscheinungen.

Auf der Scheibe einer Lochsirene bilden je vier aufeinander folgende Löcher eine Periode, in der Weise, daß die Abstände des zweiten Loches vom ersten und dritten Loch gleich groß sind, während der Abstand des dritten Loches vom vierten Loch, dem ersten der nächsten Periode, einen anderen Wert hat; das Lochschema hat also folgendes Aussehen:

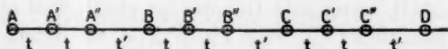


Fig. 2.

$AB = BC = CD = \dots$ sind die Perioden, und ferner ist $AA' = A'A'' = BB' = B'B'' = CC' = C'C''$ usw.; dagegen ist $A''B \geq AA'$ usw. Innerhalb einer Periode seien die Zeiten der Impulsfolgen t, t, t' , wo also $t' \geq t$ ist; die ganze Periode ist $2t + t'$. Nach den Angaben von Seebeck soll nun im Ohr hierbei stets ein Ton von der Schwingungsdauer t gehört werden, gleichgültig, ob $t \geq t'$ ist, und ob die Periode $2t + t'$ ein ganzes Vielfaches von t ist oder nicht. Es sollen eben bei dieser Anordnung, entsprechend den Vorstellungen der Periodiktheorie des Hörens, in gleichen Zeitabständen oft aufeinander folgende gleiche Impulse einen der Zeit zwischen zwei Impulsen entsprechenden subjektiven Ton geben.

Ein solches Verhalten wäre mit der Resonanztheorie des Hörens unvereinbar. Nach dieser könnte, entsprechend der Zerlegung jeder periodischen Funktion nach dem Fourierschen Satz in eine Summe von Sinusfunktionen, deren Perioden gleich der ganzen Periode $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ usw. der Periode sind, wie

1) A. Seebeck, Pogg. Ann. 53. p. 417. 1841.

im vorigen Falle bei der Pfaundlerschen Anordnung nur der der ganzen Periode $2t + t'$ entsprechende Grundton sowie dessen harmonische Obertöne gehört werden. Nur wenn zufällig die Periode $2t + t'$ ein ganzzahliges Vielfaches von t ist, würde der Ton von der Periode t als einer der Partialtöne des Klanges gehört werden. Außerdem müßten diese Töne auch objektiv außerhalb des Ohres in der Luft als Sinusschwingung vorhanden sein, sich also durch Resonatoren verstärken lassen.

G. S. Ohm¹⁾ bemerkt zu diesen Versuchsergebnissen Seebecks, die seiner Theorie widersprachen, folgendes:

Es kann sich hier der Ton t in der Tat nicht „bilden in regelrechter Weise; wenn er nun aber doch gehört wird, so würde sich dadurch sein Heraustreten aus der Regel laut genug ankündigen. Ein solches Heraustreten aus der Regel fände aber statt, wenn jede Gruppe der gleich weit auseinander liegenden Eindrücke für sich einen Ton zu liefern imstande wäre, so daß das Ohr diese einzelnen, nicht unter sich zu einem Ton streng verbundenen Töne von einerlei Höhe in sich aufnähme, etwa so, wie wenn ein und derselbe Ton von zwei Instrumenten zugleich in unser Ohr gelangt, so zwar, daß immer das eine ihn gibt unmittelbar vor oder nach dem Aufhören des anderen“.

Diese Versuche Seebecks habe ich an vier Lochscheiben I, II, III, IV wiederholt; auf jeder Scheibe befanden sich acht Perioden (AB), und zwar war bei zwei Scheiben $t > t'$, bei den beiden anderen $t < t'$. Der Abstand der Löcher vom Mittelpunkt betrug 12 cm, ihr Durchmesser 5 mm. Die Periode betrug bei allen Scheiben 60 mm. Ferner war

bei Scheibe I: $t = 25,0$ mm, $t' = 10,0$ mm

„ II: $t = 22,0$ „ , $t' = 16,6$ „

„ III: $t = 13,2$ „ , $t' = 33,6$ „

„ IV: $t = 11,2$ „ , $t' = 37,6$ „

Bei den beiden ersten Scheiben war also $t > t'$, bei den beiden anderen $t < t'$.

1) G. S. Ohm, Pogg. Ann. 59. p. 497. 1845.

Bei dieser Anordnung hätte bei allen vier Scheiben der Ton t , der nach Seebeck gehört werden soll, zum Grundton $2t + t'$ unharmonisch liegen müssen. Sei etwa der Ton $2t + t'$ der Ton c_1 , so wären die Intervalle des Tones t zum Ton $2t + t'$ folgende gewesen:

Bei Scheibe I: $60 : 25,0 = 2,40 : 1 \cong dis_2 : c_1$,

„ „ II: $60 : 22,0 = 2,70 : 1 \cong f_2 : c_1$,

„ „ III: $60 : 13,2 = 4,54 : 1 \cong d_3 : c_1$,

„ „ IV: $60 : 11,2 = 5,30 : 1 \cong f_3 : c_1$.

Die Versuche ergaben nun, daß entsprechend der Resonanztheorie des Hörens stets bei allen vier Scheiben nur der der Periode entsprechende Grundton und seine harmonischen Obertöne gehört wurden. Und zwar wurden diese Töne mit bloßem Ohr gehört, ließen sich jedoch durch Resonatoren verstärken, waren also objektiv im Klang enthalten. Besonders stark wurde ein Partialton gehört, wenn sich das Ohr gerade im Knotenpunkt der durch Reflexion an der Zimmerwand sich ausbildenden stehenden Welle des betreffenden Tones befand.

Dagegen wurde von dem Ton t , dessen Gehörtwerden Seebeck behauptet, und der, wie gesagt, zum Grundton hätte unharmonisch sein müssen, trotz größter darauf gerichteter Aufmerksamkeit nicht die geringste Spur vernommen. *Derartige subjektive Tonerscheinungen*, die etwa als *Seebeck'sche Töne* zu bezeichnen wären, *existieren also nicht*, im Einklang mit der Resonanztheorie des Hörens.

Von den vielen bei verschiedensten Drehgeschwindigkeiten angestellten Versuchen seien zur Erläuterung für jede Scheibe nur einige Versuchsreihen mitgeteilt. Die Intensität der gehörten Töne ist wieder durch daruntergesetzte Striche bezeichnet. Die in Klammern beigefügte Zahl gibt die Nummer des Partialtones, welcher der gehörte Ton entspricht.

Es wurden also in vollem Einklang mit der Resonanztheorie des Hörens stets nur die der Periode entsprechenden Partialtöne gehört, niemals aber der nach der Periodiktheorie bzw. nach den Angaben von Seebeck zu erwartende Ton.

Scheibe I.

Umdrehungs- zahl pro Sekunde	Gehörte Töne	Nach der Periodiktheorie zu erwarten
9,6	$dis(1)$ $\underline{dis}_1(1)$ $\underline{gis}_1(3)$ $dis_2(4)$ $\underline{g}_2(5)$ $\underline{b}_2(6)$ $\underline{cis}_2(7)$ $dis_3(8)$	fis_1
20,3	$c_1(1)$ $c_2(2)$ $\underline{h}_2(3)$ $\underline{gis}_2(5)$ $h_2(6)$ $\underline{d}_2(7)$	g_2
28,8	$\underline{b}_1(1)$ $\underline{b}_2(2)$ $\underline{f}_2(3)$ $b_2(4)$ $\underline{d}_2(5)$	cis_2

Scheibe II.

8,1	$c(1)$ $\underline{c}_1(2)$ $\underline{g}_1(3)$ $\underline{c}_2(4)$ $\underline{e}_2(5)$ $\underline{g}_2(6)$ $\underline{c}_2(8)$	f_1
18,1	$\underline{d}_1(1)$ $\underline{d}_2(2)$ $\underline{a}_2(3)$ $\underline{d}_2(4)$	g_1
30,5	$\underline{h}_1(1)$ $\underline{h}_2(2)$ $\underline{fis}_2(3)$ $h_2(4)$	c_2

Scheibe III.

8,1	$h(1)$ $c_1(2)$ $\underline{c}_2(4)$ $\underline{e}_2(5)$ $\underline{b}_2(7)$ $\underline{c}_2(8)$ $\underline{d}_2(9)$ $\underline{f}_2(11)$	d_2
12,1	$\underline{g}(1)$ $\underline{g}_1(2)$ $\underline{g}_2(4)$ $\underline{h}_2(5)$ $\underline{f}_2(7)$ $\underline{g}_2(8)$ $\underline{a}_2(9)$ $h_2(10)$ $\underline{c}_2(11)$	a_2
15,2	$\underline{h}(1)$ $\underline{h}_1(2)$ $\underline{h}_2(4)$ $\underline{dis}_2(5)$ $\underline{a}_2(7)$ $h_2(8)$ $\underline{cis}_2(9)$	cis_2

Scheibe IV.

8,1	$c(1)$ $\underline{c}_1(2)$ $\underline{g}_1(3)$ $\underline{c}_2(4)$ $\underline{e}_2(5)$ $\underline{g}(6)$ $\underline{c}_2(8)$	f_2
13,6	$\underline{a}(1)$ $\underline{a}_1(2)$ $\underline{e}_2(3)$ $\underline{a}_2(4)$ $\underline{cis}_2(5)$ $\underline{a}_2(8)$	d_2
18,1	$\underline{d}_1(1)$ $\underline{d}_2(2)$ $\underline{a}_2(3)$ $\underline{d}_2(4)$ $\underline{fis}_2(5)$ $\underline{a}_2(6)$ $\underline{d}_2(8)$	g_2

Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei Scheibe III der 3. und 6. Partialton nicht gehört wurde; auch bei Unterstützung des Ohres durch einen auf diese Töne eingestellten Resonators waren sie nicht zu hören. Dies ist auch nach der Resonanztheorie verständlich. Der 6. Oberton z. B. würde

besonders stark gewesen sein, wenn das zweite und dritte Loch im Abstand von

$$1 \cdot \frac{60}{6} = 10 \text{ mm, bzw. } 2 \cdot \frac{60}{6} = 20 \text{ mm,}$$

oder auch bei

$$3 \cdot \frac{60}{6} = 30 \text{ mm}$$

vom ersten Loch sich befunden hätte. Die beiden Löcher befanden sich aber im Abstand von 13,2 bzw. 26,4 mm, also ungefähr mitten zwischen diesen Stellen.

Bei Scheibe IV war der 7. Partialton nicht zu hören. Auch hier lagen die Löcher an den Stellen 11,2 und 22,4 ungefähr in der Mitte zwischen den Stellen 8,6, 17,2, 25,8 in denen sie hätten liegen müssen, wenn der 7. Partialton gerade stark hätte hervortreten sollen.

Zusammenfassung.

Es wird gezeigt, daß, wie es sich schon bei regelmäßigen Unterbrechungen oder Intensitätsschwankungen sowie bei regelmäßigen Phasenwechseln eines primär gegebenen Tones ergeben hat, auch bei den sog. Reflexionstönen oder Pfaundlerschen Tönen sowie bei den mit ihnen nahe verwandten Seebeckschen Tönen, die gehörten Klangerscheinungen, entgegen früheren Beobachtungen, nicht mit der Periodiktheorie des Hörens vereinbar sind, dagegen bis in alle Einzelheiten der *Resonanztheorie des Hörens* vollkommen entsprechen und sie bestätigen. Das Ohr verhält sich in diesen Fällen stets wie ein Satz von Resonatoren im Sinne der Helmholtzschen Vorstellungen.

Es gibt also keine „Reflexionstöne“, ebensowenig wie es Unterbrechungstöne oder Phasenwechseltöne gibt.

Hrn. Dr. F. Strieder danke ich auch an dieser Stelle herzlich für vielfache freundliche Hilfe, insbesondere beim Bau des Apparates zum Studium der Pfaundlerschen Töne.

Marburg a. L., Physik. Institut d. Univ.

(Eingegangen 18. Februar 1916.)

6. Zur Elektronentheorie der Metalle; von A. March.

1.

Aus den Untersuchungen der metallischen Leitung bei tiefen Temperaturen sind bekanntlich der klassischen Elektronentheorie der Metalle Schwierigkeiten erwachsen, die es notwendig erscheinen ließen, die Grundlagen dieser Theorie zu ändern. Wiederholt sind schon Versuche einer Anwendung der Planckschen Hypothese der Energieelemente auf die Theorie der metallischen Leitung unternommen worden¹⁾, und es scheint, als ob die Quantentheorie in der Tat geeignet wäre, die erwähnten Schwierigkeiten zu beseitigen. Außerdem zeigte W. Wien²⁾, daß die Anwendung der Quantentheorie zu Ergebnissen führt, die der alten Drudeschen Theorie nicht erreichbar waren. Ausgehend von der Annahme, daß die Zusammenstöße der schwingenden Metallatome mit den freien Elektronen den Widerstand des Metalles hervorrufen und daß Zahl und Energie der Elektronen von der Temperatur unabhängig seien, gelangt Wien, indem er die Schwingungen der Atome nach dem Debyeschen Verfahren berechnet, zu Formeln, welche den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes aus den elastischen Konstanten des Metalles zu berechnen ermöglichen. Es ergibt sich, daß Metallen mit größerer Elastizität ein höherer Temperaturkoeffizient zukommt, und die Theorie gibt gut den an Fe und Ni beobachteten hohen Wert des Koeffizienten wieder. W. H. Keesom³⁾ behandelt die freien Elektronen als ideales einatomiges Gas und wendet darauf die von Tetrode und Lenz aufgestellten Gleichungen an, wobei er deren Betrachtungen durch die schon für Helium

1) F. A. Lindemann, Berl. Ber. 1911. p. 316; A. L. Bernoulli, Zeitschr. f. Elektroch. 17. p. 689. 1911; G. Jaffé, Physik. Zeitschr. 12. p. 289. 1912.

2) W. Wien, Berl. Ber. 1913. p. 184.

3) W. H. Keesom, Physik. Zeitschr. 14. 665. 1913.

als notwendig erkannte Einführung einer Nullpunktsenergie verbessert. Er gelangt für Thermokraft, Peltier- und Thomsoneffekt zu Ansätzen, die für diese Temperaturen in Übereinstimmung mit der Erfahrung stehen. K. F. Herzfeld¹⁾ geht von der Annahme aus, daß die Elektronenenergie E sich wie die eines Oszillators darstellen lasse durch

$$E = \frac{3}{2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{\kappa T}} - 1}$$

und prüft diesen Ansatz an mehreren Metallen mittels der Formel für das Wiedemann-Franzsche Gesetz

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{4}{3e^2} E \frac{dE}{dT}.$$

Bei geeigneter Wahl von ν findet sich gute Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Im folgenden soll nun, abzielend auf das weiter unten erörterte Problem der Leitfähigkeitsänderung bei Metalllegierungen, die Quantentheorie dazu benutzt werden, die Zahl der freien Elektronen mit den Eigenschwingungszahlen der Atome in Zusammenhang zu bringen.

2.

Mit Debye nehmen wir an, daß der Energieinhalt eines festen Körpers sich nach der Methode der Eigenschwingungen anschreiben läßt in der Form

$$(1) \quad E = \frac{9N}{\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{\kappa T}} - 1} \nu^2 d\nu.$$

Dabei bedeutet N die Zahl der Atome, h die Plancksche, κ die Boltzmannsche Konstante und ν_m die Maximalzahl der Schwingungszahl, die sich aus den elastischen Konstanten des Metalles berechnen läßt. Es ist zu dieser Formel zu bemerken, daß im Sinne ihrer Ableitung an jeder möglichen Eigenschwingung sämtliche Atome des Körpers teilnehmen. Es unterliegt keinem Zweifel, daß diese Annahme der Wirklichkeit nicht entspricht, sondern lediglich der Darstellung

1) K. F. Herzfeld, Ann. d. Phys. 41. p. 27. 1913.

dient, ganz ebenso wie in manchen Fällen den einzelnen Gliedern einer Fourierschen Reihe keinerlei physikalische Bedeutung zukommt. Reell sind einzig die Schwingungen, die von den einzelnen Metallatomen unter der Wirkung der auf sie ausgeübten Kräfte ausgeführt werden, und quanten-hafte Auswechslung der Energie findet nur an den Metallatomen und nicht an den verschiedenen Eigenschwingungen des Systems statt.¹⁾ Wir treffen nun über die Emission der Elektronen eine Annahme, die ähnlich ist der Planckschen Annahme über die Energieemission von Oszillatoren. Die Emission eines Elektrons von Seite eines Atoms soll nämlich nur dann stattfinden können, wenn die Energie des Atoms den Wert eines ganzzahligen Multiplums des Elementarquantums $h\nu$ erreicht hat; wenn aber Emission stattfindet, so soll stets die ganze jeweils vorhandene Energie in kinetische Energie des fortgeschleuderten Elektrons umgesetzt werden. Die kinetische Energie des Elektrons beträgt also

$$(2) \quad \frac{1}{2} m u^2 = n h \nu - \psi \quad (n = 1, 2, \dots),$$

wenn unter ψ die „Verdampfungswärme“ des Elektrons verstanden wird. Die Zahl der in der Zeiteinheit emittierten Elektronen soll natürlich gleich sein der Zahl der in derselben Zeit zu den Atomen zurückkehrenden Elektronen, so daß stets Dissoziationsgleichgewicht besteht. Die kinetische Energie der freien Elektronen wird also den Atomen entnommen, und es soll ein von der Temperatur abhängiger Teil des durch (1) gegebenen Wärmehaltes den freien Elektronen zukommen. Nach dieser Anschauungsweise kann natürlich von einem Einfluß der freien Elektronen auf die spezifische Wärme keine Rede sein. Auf das Fehlen eines solchen Einflusses ist schon wiederholt hingewiesen worden, und J. J. Thomson²⁾ zog aus ihm den Schluß, daß die Drudesche Elektronentheorie abzulehnen sei. Es ist von Wichtigkeit, festzustellen, daß ein Beitrag der freien Elektronen zur spezifischen Wärme im ganzen Temperaturgebiet nicht beobachtet werden konnte.³⁾ Diese Tatsache ist kaum zu erklären, wenn die Zahl der Elek-

1) Vgl. hierzu die Bemerkungen von M. Planck, *Wolfskehlvorträge*, p. 15.

2) *Korpuskulartheorie der Materie*.

3) Vgl. die Bemerkung von Nernst, *Wolfskehlvorträge*, p. 70.

tronen im Kubikzentimeter von der Größenordnung der Zahl der Atome ist, wie nach den verschiedensten Methoden übereinstimmend gefunden wurde.³⁾ W. H. Keesom nimmt zur Erklärung an, daß die spezifische Wärme der Elektronen bei 0° C. ungefähr $\frac{1}{50}$ des Äquipartitionswertes betrage; diese Annahme ist aber wohl kaum mit dem Wiedemann-Franz'schen Gesetz verträglich.

Entsprechend der neueren Auffassung von Planck ist noch eine Annahme über die Nullpunktsenergie zu treffen. Beim absoluten Nullpunkt soll zwar, entsprechend der Gleichung (1) die Schwingungsenergie der Atome verschwinden; dagegen soll eine von der Natur des Metalles abhängige Zahl von Elektronen in Freiheit sein und sich mit einer gewissen Energie bewegen. Die Annahme einer solchen Nullpunktsenergie hat sich auch bei der Behandlung der idealen einatomigen Gase vom quantentheoretischen Standpunkt aus als notwendig gezeigt. Demnach zerfällt die Gesamtzahl n der freien Elektronen in zwei Teile n_0 und n'

$$n = n_0 + n',$$

von denen n_0 den von der Temperatur unabhängigen, n' den mit der Temperatur veränderlichen Teil bedeutet.

Wir berechnen n' , indem wir uns folgenden Prozeß eingeführt denken: Es werden zunächst sämtliche Energieelemente des Wärmeinhaltes E dazu benutzt, um Elektronen in Freiheit zu setzen; es bewegen sich dann die Elektronen in den intermolekularen Räumen wie Gasmoleküle und werden von den positiv geladenen Metallatomen angezogen. Denken wir uns um das positive Atom einen Raum abgegrenzt, innerhalb dessen die Anziehung eine hinreichende Stärke hat, so sollen alle Elektronen, die sich innerhalb dieser kritischen Räume befinden, ihre Energie an die Atome abgegeben haben. Zur Berechnung der Zahl dieser gebundenen Elektronen soll das Boltzmannsche e -Theorem dienen. Die Gesamtzahl A der Energieelemente ist

$$(3) \quad A = \frac{9N}{\nu_m^3} \int_0^{\nu_m} \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

1) K. F. Herzfeld (Physik. Zeitschr. 14. p. 1120. 1913) gelangt zu einer wesentlich kleineren Zahl; doch ist seine Berechnung wohl sehr unsicher.

Setzen wir

$$\frac{h\nu}{\kappa T} = \varrho,$$

so wird

$$A = \left(\frac{\kappa T}{h}\right)^3 \frac{9N}{\nu_m^3} \int_0^{\varrho_m} \frac{\varrho^3 d\varrho}{e^\varrho - 1}.$$

Für große Werte des ϱ wird

$$A = \frac{9N}{\nu_m^3} \left(\frac{\kappa T}{h}\right)^3 \int_0^{\varrho_m} \varrho^3 d\varrho (e^{-\varrho} + e^{-2\varrho} + e^{-3\varrho} + \dots).$$

Es ist

$$\int_0^{\varrho_m} \varrho^3 e^{-n\varrho} d\varrho = \int_0^\infty \varrho^3 e^{-n\varrho} d\varrho - \int_{\varrho_m}^\infty \varrho^3 e^{-n\varrho} d\varrho.$$

Für das erste Integral gilt eine bekannte Formel:

$$\int_0^\infty \varrho^3 e^{-n\varrho} d\varrho = \frac{6}{n^4},$$

und wir erhalten

$$\int_0^{\varrho_m} \varrho^3 e^{-n\varrho} d\varrho = \frac{6}{n^4} - e^{-n\varrho_m} \cdot \frac{n^3 \varrho_m^3 + 2n\varrho_m + 2}{n^4}.$$

Somit wird

$$A = \frac{9N}{\nu_m^3} \left(\frac{\kappa T}{h}\right)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^4} - e^{-n\varrho_m} \frac{n^3 \varrho_m^3 + 2n\varrho_m + 2}{n^4} \right\},$$

also für große Werte der ϱ

$$(4) \quad A = \frac{9N}{\nu_m^3} \left(\frac{\kappa T}{h}\right)^3 \sum_1^\infty \frac{1}{n^4} \dots$$

Für hohe Temperaturen, also kleine Werte von ϱ , entwickeln wir

$$\frac{\varrho^3}{e^\varrho - 1}$$

und es ist

$$\frac{\varrho^3}{e^\varrho - 1} = \varrho - \frac{\varrho^2}{2} + \frac{B_1}{2!} \varrho^3 - \frac{B_3}{4!} \varrho^5 + \frac{B_5}{6!} \varrho^7 - \dots$$

Dabei bedeuten die B_n die Bernoullischen Zahlen, und es ist

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42} \dots$$

Es wird

$$A = \frac{9 N}{\nu_m^3} \left(\frac{\pi T}{h} \right)^3 \varrho^3 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\varrho}{6} + \frac{\varrho^2}{48} - \frac{\varrho^4}{4320} + \dots \right\}$$

somit wird für sehr kleine Werte des ϱ

$$(5) \quad A = \frac{9 N}{\nu_m^3} \frac{\pi T}{h} \frac{1}{2}.$$

Berechnen wir jetzt die Zahl der in Freiheit gesetzten Elektronen zunächst unter der Voraussetzung, daß sämtliche Energieelemente $h\nu$ für die Leitungselektronen verbraucht werden. Es sei n die Gesamtzahl der überhaupt in Betracht kommenden Elektronen pro Kubikzentimeter; von dieser Zahl ist n_0 abziehen, weil zufolge unserer Annahme über die Nullpunktsenergie n_0 Elektronen bereits mit Energie ausgestattet und folglich nicht weiter zu berücksichtigen sind. Die Zahl der zu beteiligenden Elektronen ist also $n - n_0$, und unter sie verteilen wir die Energieelemente nach den Wahrscheinlichkeitssätzen.

Sollen P gleiche Teile unter N Elektronen verteilt werden, so ist nach den Wahrscheinlichkeitssätzen die Zahl der leer ausgehenden Elektronen

$$N_0 = \frac{N^2}{N + P},$$

die Zahl der mit einem Element beteiligten

$$N_1 = \frac{N^2 P}{(N + P)^2} = N_0 \frac{P}{N + P}.$$

Ferner ist

$$N_2 = N_0 \left(\frac{P}{N + P} \right)^2 \quad \text{usw.}$$

Die Zahl der beteiligten Elektronen ist also

$$N - N_0 = N - \frac{N^2}{N + P} = N \frac{P}{N + P}.$$

Auf unseren Fall angewendet, ergibt sich: Es sind A Energieelemente auf $n - n_0 = n_1$ Elektronen zu verteilen. Wir ordnen zunächst die Elemente nach ihrer Größe

$$A = \int_0^{\nu_m} dA$$

und nehmen die Verteilung vor, indem wir mit den kleinsten Elementen beginnen und zu immer größeren übergehen. Bei der ersten Verteilung werden

$$n_1 \frac{dA_1}{n_1 + dA_1}$$

Elektronen beteiligt. {Da dA_1 klein ist gegen n_1 , so ist diese Zahl gleich dA_1 . Unter der Voraussetzung, daß A klein ist gegen n_1 , wird allgemein bei der i -ten Verteilung die Zahl der beteiligten Elektronen gleich dA_i und somit die Gesamtzahl der mit Energie ausgestatteten Elektronen gleich A sein. Gilt aber die genannte Voraussetzung nicht, so ist die Zahl gegeben durch]

$$[A \cdot f(\nu_m T)]^3$$

wobei $f(\nu_m T) < 1$ ist. In den meisten Fällen wird die Vernachlässigung nicht groß sein, wenn man $f(\nu_m T) = 1$ setzt. Dann ist die Zahl der bewegten Elektronen $= A$.

Von diesen A Elektronen sind aber in einem gegebenen Zeitmoment bloß diejenigen in Freiheit, deren Mittelpunkt nicht in einen der kritischen Räume fällt. Die übrigen sind an die Atome gebunden und haben an sie ihre ganze Energie abgegeben. Um die Zahl der gebundenen Elektronen zu berechnen, greifen wir ein beliebiges Elektron heraus und bestimmen die Wahrscheinlichkeit w_0 dafür, daß es in einem der kritischen Räume liegt. Wären die von den geladenen Metallatomen ausgehenden Kräfte nicht vorhanden, so würde sich w_0 zur Wahrscheinlichkeit w dafür, daß das Elektron sich in einem von Kräften und Atomen vollkommen freien Raume liegt, verhalten wie die Summe der kritischen Räume zum Raum Ω . Sind unter den A Elektronen in einem gewissen Zeitpunkt n' Elektronen frei, also $A - n'$ gebunden, und bezeichnen wir das Volumen eines kritischen Raumes mit ω , so ist die Summe der kritischen Räume $(n_0 + n') \omega$, also

$$\frac{w_0}{w} = \frac{(n_0 + n') \omega}{\Omega}.$$

Wegen der anziehenden Kräfte, deren Potential mit ψ bezeichnet sei, wird diese Wahrscheinlichkeit im Verhältnis

$$e^{2h\psi} = e^{\frac{\psi}{\kappa T}}$$

vergrößert, also

$$w_g = w \cdot \frac{n_0 + n'}{\Omega} e^{\frac{\psi}{\kappa T}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit w_f dafür, daß das Elektron frei ist, ist gegeben durch

$$w_f = w \cdot \frac{V - V_{A\omega}}{\Omega},$$

wobei unter V das Volumen des Metalles und unter $V_{A\omega}$ das Volumen der Atome samt den kritischen Räumen bedeutet. Bezeichnen wir $V - V_{A\omega}$ als reduziertes Volumen V_r , so wird

$$w_f = w \cdot \frac{V_r}{\Omega}$$

und

$$w_f : w_g = \frac{V_r}{(n_0 + n') \omega} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}.$$

Im selben Verhältnis stehen nun auch die Zahlen n' und $A - n'$, so daß

$$\frac{n'}{A - n'} = \frac{V_r}{(n_0 + n') \omega} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}.$$

Also wird, wenn wir

$$\frac{V_r}{\omega} = \alpha$$

setzen

$$n_0 n' + n'^2 = A \cdot \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} - n' \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}$$

und

$$(6) \quad \begin{cases} n' = -\frac{1}{2} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} \right) \\ \quad + \sqrt{\frac{1}{4} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} \right)^2 + A \cdot \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}} \end{cases}$$

Setzen wir die Werte von A aus (4) und (5) ein, so wird

$$(7) \quad \begin{cases} n' = -\frac{1}{2} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} \right) \\ \quad + \sqrt{\frac{1}{4} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} \right)^2 + \text{const.} \frac{T^3}{\nu_m^3} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}} \end{cases},$$

oder für hohe Temperaturen

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} n' &= -\frac{1}{2} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} \right) \\ &+ \sqrt{\frac{1}{4} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} \right)^2 + \text{const.} \frac{T}{\nu_m} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}} \end{aligned} \right.$$

Die Zahl der freien Elektronen nimmt also mit wachsendem ν_m ab. Ändern sich die Eigenschwingungszahlen der Metallatome, sei es durch Einwirkung der Atome eines anderen Metalles (im Falle fester Lösungen) oder durch gewaltsame Annäherung der Atome aneinander (Einwirkung durch Druck), so müssen sich auch alle Erscheinungen ändern, die mit der Zahl der freien Elektronen im Zusammenhang stehen.

3.

Wenden wir die Theorie zunächst auf den Fall der Legierungen an. Matthiessen¹⁾ und in neuerer Zeit Le Chatelier²⁾ und Guertler³⁾ haben über die elektrische Leitfähigkeit von Legierungen zahlreiche und eingehende Untersuchungen angestellt. Die Versuche ergaben, daß die Leitfähigkeit sich mit der Zusammensetzung der Legierung ganz verschieden ändert, je nachdem die Legierung eine feste Lösung der beiden Bestandteile ist oder nicht. Im zweiten Falle, bei dem die beiden Komponenten im festen Zustande ineinander unlöslich sind und die Legierung aus einem Gemenge von Kristallen der beiden Bestandteile besteht (z. B. Cd—Pb), ist die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von der Zusammensetzung der Legierung sehr angenähert eine lineare. Sind aber, wie im ersten Fall, die Komponenten ineinander löslich, d. h. zur Bildung von isomorphen Mischkristallen fähig (z. B. Au—Ag), so liegen die beobachteten Werte der Leitfähigkeit beträchtlich unterhalb der Werte, die nach der Mischungsregel zu erwarten wären. Dasselbe wie von der elektrischen Leitfähigkeit gilt nach Rudolfis⁴⁾ Untersuchungen von der thermoelektrischen Kraft. Über den Grund der Leit-

1) A. Matthiessen, Pogg. Ann. 110. 1860.

2) Le Chatelier, Rev. gén. des Sciences 6. p. 531. 1895.

3) W. Guertler, Zeitschr. f. anorg. Chem. 51. p. 397. 1906; Jahrb. f. Rad. 5. p. 17. 1908.

4) M. Rudolfi, Zeitschr. f. anorg. Chem. 67. p. 65. 1910.

fähigkeitserniedrigung bei festen Lösungen sind verschiedene Ansichten geäußert worden. Lord Rayleigh¹⁾ und besonders Liebenow²⁾ suchen ihn im Auftreten von Peltiereffekten zwischen den heterogenen Teilchen der Mischung. Denkt man sich die Legierung aus abwechselnden Schichten der beiden Bestandteile aufgebaut, so findet beim Durchgang des Stromes an den Grenzflächen Wärmeproduktion oder -absorption statt, und die dadurch hervorgerufenen Temperaturdifferenzen erzeugen eine thermoelektrische Kraft, die der Richtung des Stromes entgegengesetzt ist. Es kann kaum ein Zweifel bestehen, daß diese Theorie höchstens einen Teil der Wahrheit trifft.³⁾ Abgesehen davon, daß gerade der wesentlichste Punkt, das Auftreten von Mischkristallen bei den in Frage stehenden Legierungen, ziemlich unaufgeklärt bleibt, müßte nach der Theorie die Leitfähigkeitserniedrigung bei Anwendung von Wechselströmen ausbleiben, eine Folgerung, die durch die Versuchsergebnisse von Willows⁴⁾ nicht bestätigt wurde. Auch würde sich die mit der Leitfähigkeitserniedrigung offenbar in Zusammenhang stehende Herabsetzung der thermoelektrischen Kraft kaum aus der Theorie erklären lassen.

R. Schenck⁵⁾ nimmt eine Verminderung der Beweglichkeit der freien Elektronen infolge der Vergrößerung der inneren Reibung an, E. Riecke eine Zurückdrängung der Elektronendissoziation, und Baedeker⁶⁾ bemerkt, daß es sich um einen Vorgang handeln könne, ähnlich der Dampfdruckerniedrigung von Lösungen. Was diesen letzten Vorschlag betrifft, so ist klar, daß eine derartige Theorie ohne Zuhilfenahme sehr spezieller Hypothesen nicht möglich ist. Die Dampfdruckerniedrigung bei Lösungen kommt letzten Endes dadurch zustande, daß ein Molekül des Lösungsmittels und ein gelöstes Molekül mit stärkeren Kräften aufeinander einwirken, als die Moleküle des Lösungsmittels unter sich. Auf unseren Fall übertragen, müßte man also annehmen, daß in einer

1) Lord Rayleigh, *Scientific Papers* 4. p. 232.

2) W. Liebenow, *Zeitschr. f. Elektrochem.* 4. p. 201. 1897.

3) Vgl. K. Baedeker, *Die elektrischen Erscheinungen in Metallen*, p. 47.

4) Willows, *Physik. Zeitschr.* 8. p. 173. 1907.

5) R. Schenck, *Ann. d. Phys.* 32. p. 261. 1910.

6) K. Baedeker, *l. c.* p. 93.

festen Lösung die Kräfte zwischen Metallatomen und freien Elektronen andere sind als im reinen Metall, eine Annahme, die ohne Bildung besonderer, bloß ad hoc konstruierter Hypothesen kaum begründbar sein wird.

Es scheint nun, daß die oben entwickelte Theorie der freien Elektronen die angegebenen Erfahrungstatsachen zu erklären vermag. Die Erklärung ist kurz die, daß die Bildung fester Metallösungen von einer Änderung der elastischen Eigenschaften im Sinne einer Vergrößerung der Schwingungszahl ν_m begleitet ist; durch die Vergrößerung der ν wird die Zahl der Energieelemente und damit nach (7) auch die der freien Elektronen herabgesetzt. Sind aber die Komponenten der Legierung ineinander unlöslich, so behalten beide Komponenten ihre charakteristischen Schwingungszahlen bei und es ändern sich die elastischen Eigenschaften und damit auch die Zahl der Energieelemente und freien Elektronen nach Maßgabe der Mischungsregel. Soweit also die elektrische Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{m u}$$

(e Ladung, m Masse, u mittlere Geschwindigkeit eines Elektrons, λ freie Weglänge) von der Zahl n der freien Elektronen abhängt, wird ihre Änderung im zweiten Fall eine lineare sein, im ersten aber von der linearen im Sinne einer Verkleinerung abweichen.

Die Vergrößerung des ν hat ihren Grund natürlich darin, daß die Kräfte, welche die Bewegung der Atome bestimmen, im Falle einer festen Lösung stark vergrößert sind. Die Kraft nämlich, die ein Atom immer wieder in seine Ruhelage zurückzukehren zwingt und die wir uns mit Grüneisen¹⁾ aus anziehenden und abstoßenden Kräften resultierend denken, geht von den Nachbaratomen aus. Bei hinreichend kleiner Entfernung aus der Ruhelage wird man die Kraft immer als eine quasielastische annehmen dürfen, wie kompliziert auch immer die Kraft mit der Entfernung sich ändern mag, und die Bewegung des Atoms erfolgt nach der Gleichung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = 0; \quad x = x_0 \cos 2 \pi \nu t; \quad \nu^2 = \frac{a^2}{4 \pi^2 m}.$$

1) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. 39. p. 257. 1912.

Nun werden in einer Legierung *A*, *B* sich nur dann Mischkristalle bilden, wenn ein Molekül *A* und ein Molekül *B* mit stärkeren Kräften aufeinander einwirken als zwei Moleküle *A* oder *B* untereinander. Diese Annahme entspricht ganz den Anschauungen, die man sich nach Boltzmann und Lorentz in der kinetischen Theorie der Lösungen zur Erklärung des osmotischen Druckes und der Dampfspannungserniedrigung zu bilden hat. Der Wert von a^2 und somit auch der von ν wird also in einer festen Lösung einen größeren Wert haben als in jedem der beiden Bestandteile. Wenn aber die Kräfte, welche die Moleküle *A* und die Moleküle *B* unter sich aufeinander ausüben, die gegenseitigen Kräfte überwiegen, so werden sich die Moleküle *A* und *B* beide für sich zu Kristallen zusammenschließen und die Legierung wird aus einem Konglomerat von Kristallen der beiden Bestandteile bestehen. In diesem Falle der Unlöslichkeit bleiben also die Eigenschaften eines jeden Bestandteiles erhalten.

Nun reichen allerdings die bisherigen Messungen zur Berechnung des Verlaufes von ν nicht aus; hierzu wäre insbesondere die Kenntnis des Verlaufes der Kompressibilität notwendig. Untersucht wurden besonders die für die Praxis in erster Linie in Betracht kommenden Eigenschaften der Festigkeit für Zug und Bruch, der Dehnbarkeit und Härte. Anscheinend liegen für die Härte die ausgedehntesten Untersuchungen vor und man kann an ihnen eine vorläufige Prüfung der Theorie versuchen. Die Härte ist bisher freilich einer theoretischen Behandlung noch nicht zugänglich gewesen; doch weiß man von ihr, daß sie mit wachsendem ν_m zunimmt. Nach der Theorie ist also zu erwarten, daß bei festen Lösungen das Maximum der Härte mit dem Minimum der Leitfähigkeit zusammenfällt; im Falle der Nichtlöslichkeit aber sollte die Härte ebenso wie die Leitfähigkeit sich linear mit der Konzentration ändern.

Die Untersuchungen von Kurnakow und Żemczużny¹⁾ bestätigen diese Vermutungen; es hat sich ergeben, daß bei binären Systemen, die Mischkristalle bilden, die Härte jedes Bestandteiles durch Zusatz des anderen anfangs stark, dann langsamer wächst; bei ununterbrochenen Lösungsreihen wächst

1) N. S. Kurnakow u. S. F. Żemczużny, Zeitschr. f. anorg. Chem. 60, p. 1. 1908.

die Härte kontinuierlich von beiden Seiten bis zu einem Maximum. Sind aber die beiden Metalle im kristallisierten Zustande vollkommen ineinander unlöslich, so steht die Härte der Legierung in linearer Abhängigkeit von der Zusammensetzung. Kurnakow selbst hebt hervor, daß bei isomorphen Gemischen der Maximalpunkt des Härtegraphen mit dem Minimum der elektrischen Leitfähigkeit zusammenfällt; es scheint ihm das ein anschaulicher Beweis für das Vorhandensein inniger Beziehungen zwischen den genannten zwei Eigenschaften zu sein.

Isomorphe Gemische des Goldes mit Silber.

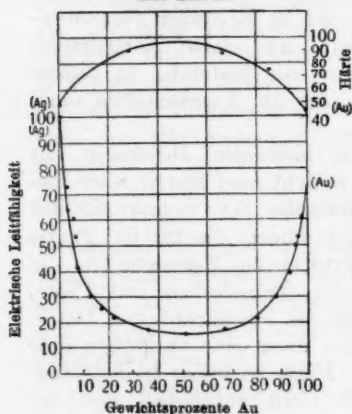


Fig. 1.

Isomorphe Gemische des Goldes mit Kupfer.

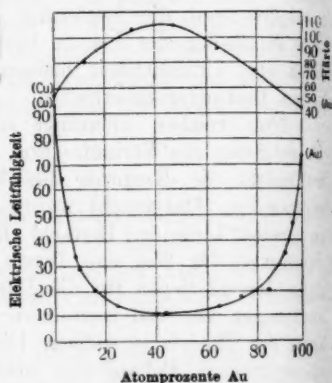


Fig. 2.

Den Zusammenhang von Härte und Leitfähigkeit bei isomorphen Gemischen zeigen die Figg. 1 und 2, die der genannten Abhandlung von Kurnakow entnommen sind. Die Härte wurde in der Weise gemessen, daß auf der polierten Oberfläche der Legierung mit Hilfe einer Diamantspitze bei konstanter Belastung Striche aufgetragen und diese Striche ausgemessen wurden.

4.

Nach der Molekulartheorie von Grüneisen¹⁾ ist die Gesamtenergie der Atome zu trennen in die Schwingungsenergie

1) E. Grüneisen, l. c.

um die jeweiligen Ruhelagen und in die potentielle Energie der in den Schwingungsmittelpunkten ruhend gedachten Atommittelpunkte. Diese potentielle Energie U_s ist eine Funktion des Volumens, und Grüneisen schreibt sie an in der Form

$$U_s = -\frac{c_1}{V} + \frac{c_2}{V^m},$$

wobei c_1 , c_2 und m positive Konstanten bedeuten. Wir wollen im folgenden annehmen, daß allen Atomen dieselbe Schwingungszahl ν zukomme; diese Schwingungszahl berechnet sich aus der Direktionskraft der Atome, diese letztere aber aus der potentiellen Energie, und es ergibt sich die Beziehung

$$\nu = z \sqrt{\frac{c_1}{A V^{1/2}} \left(\frac{V_0}{V}\right)^{m-1}}.$$

Es hat also eine Änderung des Volumens eine Änderung der Schwingungszahl zur Folge, und man findet

$$\nu \frac{d \log \nu}{d V} = -\frac{3m+2}{6}.$$

Wird also das Volumen durch Druck verkleinert, so wird die Frequenz vergrößert nach der Gleichung

$$\frac{d \log \nu}{d p} = \frac{d \log \nu}{d V} \frac{d V}{d p} = \frac{3m+2}{6} \frac{\alpha}{V^2}$$

wenn α die Kompressibilität bedeutet.

Es wird also durch Druck die Zahl der freien Elektronen verkleinert und es wird ein Teil der bei Druckeinwirkungen beobachteten Widerstandsvermehrung auf diese Herabsetzung der Elektronenzahl zurückzuführen sein. Nach Gleichung (7') ist

$$\frac{1}{n} \frac{d n}{d p} = \frac{\text{const.}}{n} \frac{-\frac{T}{\nu^2} \frac{d \nu}{d p} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}}{\sqrt{\frac{1}{4} \left(n_0 + \alpha e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}\right)^2 + \frac{\text{const.} T}{\nu} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}}}.$$

Den Zähler können wir schreiben

$$-\frac{T}{\nu^2} \frac{d \nu}{d p} e^{-\frac{\psi}{\kappa T}} = -\frac{1}{\nu} \frac{3m+2}{6} \alpha \frac{T e^{-\frac{\psi}{\kappa T}}}{V^2}.$$

Nun ist nach der Theorie des Peltiereffektes die Gesamtzahl der Elektronen für alle Metalle ungefähr dieselbe. Vernachlässigen wir ferner die Verschiedenheit von n_0 und α für

die verschiedenen Metalle, so kann man die Widerstandsvermehrung durch Druck bei derselben Temperatur zu berechnen versuchen aus

$$\frac{1}{\nu} \frac{3m+2}{6} \alpha \cdot \text{const.}$$

Mit Hilfe der von Grüneisen berechneten Werte von m ergibt sich, wenn man die Konstante $= 9 \cdot 10^{12}$ setzt, folgende Tabelle:

	$\frac{3m+2}{6}$	$\alpha \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^{12} 1)$	$\frac{1}{w} \frac{dw}{dp} \cdot 10^6$	
				beob. ²⁾	ber.
Silber	2,3	1,0	4,5	3,8	4,6
Kupfer	1,9	0,8	6,6	2,1	2,1
Platin	2,4	0,4	4,7	1,9	1,8
Blei	2,4	2,4	1,9	14,3	27,2
Aluminium	1,4	1,4	8,3	3,9	2,1

Wismut zeigt, im Gegensatz zu den anderen Metallen, eine Widerstandsverminderung; Grüneisen hat für Bi das m nicht berechnet. Es wäre nicht unmöglich, daß bei Bi durch Druck die Schwingungszahlen vergrößert werden. Doch spielen bei der Widerstandsänderung natürlich auch die freie Weglänge sowie die Vermehrung der Atome im Kubikzentimeter eine wichtige Rolle, so daß eine Übereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Zahlen nicht zu erwarten ist.

1) Nach W. Nernst, Theoretische Chemie, 7. Aufl. p. 264. Für Platin ist ν nach Debye berechnet.

2) Nach den Messungen von Lissels u. Williams.

(Eingegangen 25. Februar 1916.)

**7. Das Emissionsspektrum
zweiatomiger Verbindungsgase im fernerem
Ultrarot;
von W. Mandersloot.**

Einleitung. Im folgenden wird auf Grund der klassischen Theorie angenommen, daß, sei es bei mittleren und höheren Temperaturen, das Äquipartitionsgesetz der Energie gilt für die Translation und Rotation von Gasmolekülen. Zuerst möge das Spektrum der rotierenden Dipole abgeleitet werden; dann wird gezeigt, daß die Translation hierauf keinen merklichen Einfluß hat; und danach wird das Maximum berechnet, ein Verschiebungsgesetz für Gase angegeben und eine Beziehung festgestellt zwischen den näheren und fernerem Ultrarot.

§ 1. Die Intensitätsverteilung durch Rotation.

Bestimmungen der spezifischen Wärme machen es klar, daß ein zweiatomiges Molekül nur zwei Hauptträgheitsachsen (1. und 2.) hat, welche außerdem noch gleichwertig sind.

Die Wahrscheinlichkeit einer Winkelgeschwindigkeit um Achse 1, zwischen ω_1 und $\omega_1 + d\omega_1$ sei proportional

$$e^{-\frac{1}{2} \frac{L \omega_1^2}{k T}} \cdot d\omega_1,$$

worin L das Trägheitsmoment, k die Boltzmannsche Konstante und T die absolute Temperatur bedeuten.

Die gleiche um Achse 2, zwischen ω_2 und $\omega_2 + d\omega_2$ sei proportional

$$e^{-\frac{1}{2} \frac{L \omega_2^2}{k T}} \cdot d\omega_2.$$

Die beiden Hauptträgheitsachsen gehen durch den Schwerpunkt des Dipols und stehen senkrecht zur Halterachse, so auch die immer wechselnde Rotationsachse ω .

Für jedes Molekül ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Rotationsfrequenz in 2π Sekunden zwischen (ω_1, ω_2) und $(\omega_1 + d\omega_1, \omega_2 + d\omega_2)$ ist proportional

$$e^{-\frac{1/2 L (\omega_1^2 + \omega_2^2)}{k T}} \cdot d\omega_1 d\omega_2,$$

und von (ω, φ) bis $(\omega + d\omega, \varphi + d\varphi)$ mit

$$\omega \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \cdot d\omega d\varphi,$$

und weiter zwischen ω und $\omega + d\omega$, also unabhängig von der Richtung der Rotationsachse,

$$\frac{L}{k T} \cdot \omega \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \cdot d\omega.$$

Der Faktor, L/kT , kommt hinzu, um nach Integration von 0 bis ∞ den Wahrscheinlichkeitswert 1 zu liefern.

Pro Mol ist die gesamte Rotationsenergie der zweiatomigen Gase

$$\int_0^\infty \frac{1}{2} L \omega^2 \cdot N \cdot \frac{L \omega}{k T} e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \cdot d\omega.$$

Setzt man

$$\frac{1}{2} \frac{L \omega^2}{k T} = \xi,$$

so wird das Integral:

$$N k T \int_0^\infty \xi \cdot e^{-\xi} d\xi = N k T \cdot \Gamma(2) = N k T = R T.$$

Der Poyntingsche Energiestrom eines rotierenden Dipols ist proportional ω^4 ; die Anzahl Dipolen mit einer Rotationsfrequenz von ω bis $\omega + d\omega$ war proportional

$$\frac{L \omega}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \cdot d\omega.$$

Die Intensitätsverteilung wird also:

$$J(\omega) d\omega = \frac{L \omega^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \cdot d\omega.$$

§ 2. Einfluß der Translation.

Hat ein rotierender Dipol von der Frequenz ω' (in 2π Sekunden) eine Translationskomponente ζ in der Gesichtslinie, so ist die scheinbare Frequenz der durch Rotieren ausgestrahlten Energie

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{\zeta}{c}\right).$$

Die Anzahl der elementaren Strahlungsquellen von ω' bis $\omega' + d\omega'$ war proportional

$$\frac{L \omega'^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega'^2}{k T}} \cdot d\omega',$$

und ihre Intensität:

$$\frac{L \omega'^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega'^2}{k T}} \cdot d\omega'.$$

Von dieser Anzahl haben die Komponenten zwischen ζ und $\zeta + d\zeta$ eine Menge proportional

$$e^{-\frac{1/2 m \zeta^2}{k T}} \cdot d\zeta,$$

so daß die Intensität an der Stelle ω im Spektrum bedingt wird durch das Integral:

$$J_\omega = \frac{L \omega^5}{k T} \int_{\zeta=-\infty}^{\zeta=+\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{c}\right)^5 \cdot e^{-\frac{1/2 m \zeta^2}{k T}} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T} \left(1 - \frac{\zeta}{c}\right)^2} \cdot d\zeta,$$

oder annäherungsweise:

$$J_\omega = \frac{L \omega^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - 5 \frac{\zeta}{c}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2kT} \left[m \zeta^2 - \frac{2L \omega^2}{c} \zeta\right]} \cdot d\zeta.$$

Nach Aufspaltung:

$$J_{\omega} = \frac{L \omega^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \left[1 - \frac{L \omega^2}{m c^2} \right]$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2kT} \left[\zeta \sqrt{m} - \frac{L \omega^2}{c \sqrt{m}} \right]^2} \cdot d\zeta - \frac{5}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta \cdot e^{-\frac{1}{2kT} \left[\zeta \sqrt{m} - \frac{L \omega^2}{c \sqrt{m}} \right]^2} \cdot d\zeta \right\}$$

$$= \frac{L \omega^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \left[1 - \frac{L \omega^2}{m c^2} \right] \left\{ \sqrt{\frac{\pi \cdot 2kT}{m}} - \frac{5}{c} \frac{L \omega^2}{c m} \sqrt{\frac{\pi \cdot 2kT}{m}} \right\}.$$

Vereinfacht:

$$J_{\omega} \sim \frac{L \omega^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \left[1 - \frac{L \omega^2}{m c^2} \right] \left\{ 1 - 5 \frac{L \omega^2}{m c^2} \right\}.$$

Schätzen wir die Korrektionsglieder

$$\frac{L \omega^2}{m c^2}$$

ab. Das Trägheitsmoment L ist gleich $m r^2$, wobei r von der Größenordnung 10^{-8} cm sei. Bei $\lambda \simeq 100 \mu$, oder $\omega \simeq 2 \cdot 10^{13}$, kann man setzen:

$$\frac{L \omega^2}{m c^2} = \frac{r^2 \omega^2}{c^2} = \frac{10^{-16} \cdot 4 \cdot 10^{26}}{9 \cdot 10^{20}} \simeq 4 \cdot 10^{-11}.$$

Dies fällt gegen Eins fort, so daß die Translation keinen merklichen Einfluß auf das Rotationsspektrum der Dipole ausübt.

§ 3. Das Maximum.

Die Intensitätsverteilung bleibt also

$$J(\omega) d\omega = \frac{L \omega^5}{k T} \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} \cdot d\omega.$$

Durch Differentiation berechnet man aus:

$$\frac{dJ}{d\omega} = \frac{L \omega^4}{k T} \left(5 - \frac{L \omega^2}{k T} \right) \cdot e^{-\frac{1/2 L \omega^2}{k T}} = 0$$

für das Maximum ω_m

$$\omega_m^2 = 5 \frac{k T}{L}.$$

Bei zweiatomigen Verbindungsgasen gilt deshalb das Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_m^2 T = \frac{4\pi^2 c^2 L}{5k} = \text{Konst.},$$

oder

$$\lambda_m = \frac{2}{5} \sqrt{5} \cdot \pi c \sqrt{\frac{L}{kT}}.$$

Auf Grund der klassischen Theorie hat ein zweiatomiges Verbindungsgas (HCl, HBr, CO usw.) ein kontinuierliches Spektrum im fernen Ultrarot durch die Rotation der geladenen Moleküle. Merkwürdigerweise besitzen diese Gase im näheren Ultrarot noch eine einzige Doppelbande, das nur erklärt wird, wenn die elektrisch geladenen Atome lineare Schwingungen in der Halterachse, also senkrecht zur Rotationsachse ausführen. Durch die Rotationsgeschwindigkeit α spaltet sich die ursprünglich gemeinsame Schwingungsfrequenz ω in der ganzen Umgebung der elementaren Schwingungsquelle auf in zwei Komponenten $\omega \pm \alpha$, wie an anderer Stelle vom Verfasser¹⁾ behandelt ist.

Das Verteilungsgesetz der Rotationsfrequenzen beherrscht auch hier die Intensitätskurve der Doppelbande, und für die Entfernung der beiden Maxima $[\omega_1; \omega_2]$ wurde gefunden:

$$\omega_1 - \omega_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{kT}{L}}.$$

Setzt man dies in die oben abgeleitete Intensitätsverteilung ein, so entsteht:

$$J(\omega) d\omega = \frac{4\omega^5}{(\omega_1 - \omega_2)^2} \cdot e^{-\frac{2\omega^2}{(\omega_1 - \omega_2)^2}} \cdot d\omega,$$

worin alle mechanischen Größen eliminiert sind und eine direkte Beziehung zwischen dem näheren und fernen Ultrarot angegeben ist.

Für das Maximum gilt:

$$\omega_m = \frac{1}{2} \sqrt{5} \cdot (\omega_1 - \omega_2),$$

oder im λ -Spektrum

$$\lambda_m = \frac{2}{5} \sqrt{5} \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

1) W. C. Mandersloot, Breite von Spektrallinien, p. 25 u. 54; Diss. Utrecht 1914; Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 18. Kap. II § 2, Kap. III § 2; 1916.

In der Nernst-Festschrift (1912) hat N. Bjerrum, noch bevor die ultraroten Absorptionsbanden getrennt worden waren, eine Beziehung zwischen dem näheren und fernerem Ultrarot durch Rotation der Moleküle angedeutet.

Im Jahre 1913 haben W. Burmeister¹⁾ und Eva von Bahr²⁾ die Absorptionsbanden im näheren Ultrarot getrennt, wodurch es möglich ist, das Maximum numerisch zu bestimmen.

Allerdings hat Eva von Bahr³⁾ schon Werte für λ_m mitgeteilt, welche aber von den hiernach folgenden systematisch abweichen. Aus den beiden Maxima λ_1 und λ_2 berechnet sie sofort die wahrscheinlichste Rotationsfrequenz, und die entsprechende Wellenlänge λ_m , indem der Poyntingfaktor ω^4 dann außer Betracht bleibt, wozu man bei Absorption wohl berechtigt sein wird.

Gas	$[\lambda_1 \quad \lambda_2]$	λ_m	λ_m nach E. v. B.
HCl	[3,40; 3,55 μ]	72 μ	160 μ
HBr	[3,84; 4,01 μ]	81 μ	180 μ
CO	[4,62; 4,74 μ]	163 μ	365 μ

Bemerkenswert ist noch, daß die Elementgase (H_2 , O_2 , N_2 , Cl_2 , Br_2 usw.) im näheren Ultrarot keine Absorption zeigen. Die betreffenden Moleküle sind deshalb keine Dipole, so daß eine chemische Bindung nicht rein elektrisch sein kann. Auch im fernerem Ultrarot werden die Elementgase weder emittieren noch absorbieren, was für die Strahlung der Erdoberfläche nicht ohne Deutung ist.

Delft, Lab. f. Physik u. Elektrotechnik, 1916.

1) Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. p. 589. 1913.

2) Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 15. p. 710 u. 1150. 1913.

3) Eva v. Bahr, l. c. p. 727.

(Eingegangen 9. März 1916.)

8. Beobachtungen über den zeitlichen Verlauf der Lichtemission in Spektralserien;

von J. Stark.

(Hierzu Tafel III u. IV.)

Inhalt: 1. Einleitung. — 2. Methoden. — 3. Vorgänge hinter der Kanalstrahlenkathode. — 4. Ursprung der Lichtemissionen innerhalb der Kanalstrahlenlamelle hinter der Kathode. — 5. Ursprung der Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle hinter der Kathode. — 6. Die Leuchtdauer der H- und He-Serienlinien nimmt zu mit steigender Gliednummer. — 7. Die Leuchtdauer der Li-Serienlinien nimmt ebenfalls zu mit steigender Gliednummer. — 8. Berechnung einer oberen Grenze der Leuchtdauer von H-Bandenlinien und von H- und He-Serienlinien. — 9. Bedeutung der Leuchtdauer der Glieder einer Serie für das Verhältnis ihrer bewegten Intensitäten in den Kanalstrahlen.

1. *Einleitung.* — In einem Raumteil sollen die Träger von Spektrallinien durch den Stoß von Kanalstrahlen so getroffen werden, daß sie infolgedessen zu leuchten beginnen; unmittelbar nach dem Stoß sollen sie dank ihrer thermischen Geschwindigkeiten, die sie als Gasmoleküle besitzen, aus dem Raumteil der Stoßerregung heraus in benachbarte, nicht von Kanalstrahlen durchlaufene Raumteile hinüberfliegen. Während dieses Heraustretens aus dem durchstrahlten Gebiet nach einem strahlenfreien Punkt im Abstand a mit der Geschwindigkeit v vergeht die Zeit $T = a/v$. Es kann dann die Intensität einer Spektrallinie, welche aus dem durchstrahlten Gebiet kommt, mit derjenigen verglichen werden, welche von dem strahlenfreien Punkt ausgeht.

Solche Beobachtungen ermöglichen vielleicht, für eine einzelne Spektrallinie wenigstens der Größenordnung nach die Zeitdauer zu ermitteln, welche von dem Moment des Stoßes bis zu demjenigen Moment vergeht, in welchem die Intensität der Spektrallinie auf den Bruchteil

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{2,7}$$

ihres anfänglichen Wertes gesunken ist. Noch wichtiger wird

es im Hinblick auf das Problem des Ursprungs einer Spektralserie und somit auf eine Frage der Atomdynamik sein, die aufeinanderfolgenden Glieder einer Serie hinsichtlich des zeitlichen Verlaufes ihrer Lichtemission in der vorstehenden Weise miteinander zu vergleichen.

Ehe man an ein derartiges neues Problem herantritt, wird man sich nach experimenteller und theoretischer Vorarbeit darüber umsehen. In experimenteller Hinsicht konnte ich nichts darüber in der Literatur finden. Dagegen ist die Frage der Abnahme der Lichtemission eines einzelnen Dipols infolge von Strahlungsdämpfung bereits mehrfach theoretisch auf dem Boden der Maxwell'schen Theorie behandelt worden. So lassen sich nach M. Abraham¹⁾ für die Abnahme der Schwingungsenergie eines Dipols infolge von Ausstrahlung folgende Formeln entwickeln, wenn J die Intensität, e die Ladung, m die Masse eines schwingenden Elektrons, λ die Wellenlänge der von ihm emittierten Spektrallinie bedeutet:

$$J = J_0 e^{-kt},$$

$$k = \frac{8\pi^2}{3} \frac{e^2}{cm\lambda^3}.$$

Für $e/m = 5,3 \cdot 10^{17}$ stat. Einh., $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ stat. Einh., $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, berechnet sich hieraus als „Abklingzeit“ für $\frac{J}{J_0} = \frac{1}{e}$ der Wert $T = \frac{1}{k} = 1,1 \cdot 10^{-8}$ sec.

So wertvoll dieses Resultat der Theorie ist, so darf man doch nicht erwarten, daß es sich für eine beliebige Spektrallinie durch die Beobachtung bestätigen läßt. Denn die Theorie führt die Rechnung unter den Voraussetzungen durch, daß nur ein einziges Elektron im Linienträger in Schwingungen um seine Ruhelage eine einzige Spektrallinie emittiert und lediglich durch unmittelbare Ausstrahlung gedämpft wird. Es mag sein, daß es Spektrallinien gibt, für welche diese Voraussetzungen zutreffen. Im allgemeinen wird es indes nicht der Fall sein. Wir haben nämlich einmal mit der Möglichkeit zu rechnen, daß in einem Linienträger mehrere gleichartige Elektronen vorkommen, in geordneter Weise miteinander gekoppelt sind und darum ihre Emissionen zur Interferenz bringen.

¹⁾ M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. p. 70. B. G. Teubner, Leipzig 1905.

Ferner ist möglich, daß ein Elektron infolge seiner Koppelung mit den übrigen Teilen des Linienträgers in mehreren Frequenzen mit zeitlich variablen Amplituden schwingen und somit seine Schwingungsenergie aus einer Frequenz in eine andere überführen kann. Auch kann infolge einer solchen Koppelung die Schwingungsenergie eines Elektrons nicht allein durch unmittelbare Ausstrahlung, sondern auch durch Energieaustausch mit anderen Atomteilen zeitlich sich ändern. Endlich ist denkbar, daß ein Linienträger nach dem erregenden Stoß von Seite eines Kanalstrahlenteilchens eine Umlagerung durchläuft und den einer gewissen Frequenz zugeordneten Zustand erst in einer gewissen Zeit nach dem Stoß erreicht, die Zustände für die aufeinanderfolgenden Serienfrequenzen in verschiedenen langen Zeiten.

Die Erwägung dieser Möglichkeiten verlangt eine vorsichtige und vorurteilsfreie experimentelle Behandlung des aufgeworfenen Problems. So darf man nicht als selbstverständlich voraussetzen, daß unter den angenommenen Versuchsbedingungen alle Frequenzen, welche ein einzelner Linienträger infolge des Stoßes eines Kanalstrahlenteilchens zu emittieren vermag, gleich unmittelbar nach dem Stoß den größten Wert der Intensität haben, und daß diese von dem Stoßmoment ab gemäß der Exponentialfunktion $J = J_0 e^{-kt}$ mit wachsender Zeit abklingt. Wir müssen auch mit der Möglichkeit rechnen, daß die Intensität einer Frequenz unmittelbar nach dem erregenden Stoß erst verhältniß langsam infolge Steigerung ihrer Amplitude aus der inneratomischen Koppelung anwächst und darauf durch Ausstrahlung und Energieabgabe an andere Frequenzen wieder abnimmt.

Würden alle durch den Stoß von Kanalstrahlen zu Lichtemission angeregten Linienträger senkrecht zur Achse der Kanalstrahlen und senkrecht zur Sehlinie aus dem Erregungsgebiet in die strahlenfreie Umgebung mit der gleichen Geschwindigkeit fliegen, so würde sich entlang ihrer Bahn die zeitliche Änderung der Intensität ihrer Spektrallinien genau verfolgen lassen. So aber läßt die Unordnung der thermischen Bewegung einen Teil der Linienträger unmittelbar nach dem Stoß parallel den Achsen der Kanalstrahlen und der Sehlinie verlaufen, so daß ihre Emission während ihres ganzen Verlaufes für den Beobachter nicht aus dem Bild des Erregungs-

gebietes heraustritt. Zudem haben auch die senkrecht zu den Achsen der Kanalstrahlen und der Sehlinie laufenden Linienträger nicht alle die gleiche Geschwindigkeit. Aus diesen Gründen und wegen der besprochenen Möglichkeiten läßt sich die oben definierte Leuchtdauer $T = a/v$ aus der Intensität im Erregungsgebiet und derjenigen in einem benachbarten strahlenfreien Gebiet, wie weiter unten dargelegt werden wird, nur unter gewissen Voraussetzungen berechnen.

Trotzdem gemäß dieser Überlegungen die Analyse des zeitlichen Verlaufes der Lichtemission von Spektrallinien unter den von mir gewählten Versuchsbedingungen nur eine unvollkommene sein kann, reizte mich das aufgeworfene experimentelle Problem. Denn die so zu ermittelnde Leuchtdauer gibt jedenfalls eine obere Grenze für die Abklingzeit und noch interessanter erschien mir, wie bereits erwähnt, der Vergleich der Werte der Leuchtdauer verschiedener Glieder einer Spektralserie oder einer Serien- und einer Bandenlinie desselben Elementes. Wenn ich in dieser Hinsicht auch ohne theoretische Voreingenommenheit an das experimentelle Problem herantrat, so hatte ich doch zunächst eine Bestätigung der obigen theoretischen Formel für die Abklingzeit eines Dipols erwartet. Nach ihr ist die Abklingzeit eines Dipols proportional dem Quadrat der Wellenlänge seiner Spektrallinie; würden also die von Rot nach Violett aufeinander folgenden Glieder einer Serie von einzelnen unabhängigen Dipolen emittiert werden, so würden ihre Abklingzeiten rasch mit steigender Gliednummer abnehmen. Ich war darum überrascht, als mir die Beobachtung ein ganz anderes Seriengesetz für die Leuchtdauer unter meinen Versuchsbedingungen lieferte, und ich habe diese darum eingehender, als ich im nachstehenden mitteilen kann, geprüft und lange nach einer anderen Erklärung gesucht, als ich schließlich als allein möglich zulassen muß.

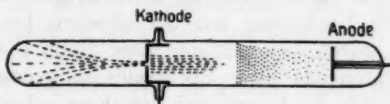


Fig. 1.

2. Methoden. — Fig. 1 stellt einen vertikalen Längsschnitt der von mir verwendeten Kanalstrahlenröhre dar. Ihr

Durchmesser betrug 4,4 cm; die in drei Punkten festgehaltene Kathode war ein 2 cm hoher Zylinder aus 2 mm dickem Aluminiumblech mit einem Boden aus ebenso dickem Alu-

miniumblech. In diesen war symmetrisch zur Mitte ein 2 cm breiter, 2 mm hoher Schlitz geschnitten. Durch diesen traten die Kanalstrahlen in Form einer Lamelle in den Raum hinter der Kathode, zunächst auf 2–3 cm Länge scharf begrenzt bleibend, dann mehr und mehr sich zerstreuerd.

Fig. 2 läßt in einem horizontalen Schnitt die von mir verwendete optische Anordnung überschauen. Die horizontal liegende Kanalstrahlenlamelle wurde durch ein Tessar (1:3,5)

von 5 cm Brennweite scharf auf den Spektrographenspalt abgebildet (Gegenstandsweite 35 cm, Bildweite 5,5 cm), so daß also die Achse des Spaltrohres der Kanalstrahlenlamelle parallel war, auf die Spaltmitte deren Schmalseite

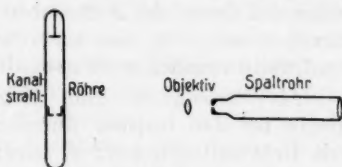


Fig. 2.

und auf die darüber und darunter liegenden Spaltpunkte die unterhalb und oberhalb der Lamelle liegenden parallelen Ebenen im Kanalstrahlenrohre scharf abgebildet wurden. Bei einer Anzahl von Aufnahmen stand die Kanalstrahlenröhre wie in der Fig. so, daß ihre Achse senkrecht zur Achse des Spaltrohres lag; hierbei schnitt diese die Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode in 3–5 mm Abstand von ihr. Bei den übrigen Versuchen war die Röhre aus dieser Lage um eine vertikale Achse um 45° herausgedreht, so daß die Kanalstrahlen mit einer Geschwindigkeitskomponente in der Sehlinie auf den Beobachter zuliefen. Dies geschah bei den Serienlinien des Wasserstoffs und Stickstoffs, um die bewegten Streifen (Dopplereffekt) von den ruhenden Linien getrennt zu erhalten.

Als Spektrograph wurde in der Mehrzahl der Aufnahmen ein Prismenapparat, bei einigen Aufnahmen der Wasserstoffserie zur Beobachtung von H_α ein Plangitterspektrograph verwendet. Beide Apparate habe ich an anderer Stelle¹⁾ näher beschrieben. Wichtig ist in dieser Mitteilung der Hinweis, daß die Spalt- und die Kameraobjektive dieser zwei Apparate Achromate (Tessare) sind, ebenso wie das zur Abbildung der Kanalstrahlenlamelle auf den Spalt verwendete Objektiv. Die Verwendung von Achromaten war in der vorliegenden Unter-

¹⁾ J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. p. 28. S. Hirzel, Leipzig 1914.

suchung deswegen notwendig, weil die Längen der von der Kanalstrahlenlamelle emittierten Spektrallinien verschiedener Frequenz miteinander verglichen und insbesondere der Abfall der Schwärzung in ihren Enden untersucht werden sollte, falls diese Enden aus dem Bildgebiet der Lamelle heraus in das Bild des strahlenfreien Gasraumes hinein sich fortsetzten. Diese Forderung scharfer Abbildung der verglichenen Linien war in der Tat von λ 6500 bis λ 3880 Å gut erfüllt, wie weiter unten auf Grund der Aufnahmen selbst dargelegt werden wird. Erwähnt sei noch, daß im Interesse großer Lichtstärke die Spaltweite ziemlich groß gewählt wurde.

Als Stromquelle zum Betrieb der Kanalstrahlenröhre diente bei den meisten Aufnahmen ein großes Induktorium mit Rotaxunterbrecher; in seinem Sekundärkreis lag vor der Kanalstrahlenröhre eine harte Ventilröhre. Die Kathode war hierbei dauernd geerdet. Die Röhre war so stark belastet, daß die von den Kathodenstrahlen getroffene Anode (Aluminiumscheibe) gerade dunkelrot glühte. Der Kathodenfall betrug 13000–16000 Volt, so daß eben weiche Röntgenstrahlen merkbar waren. Diese hohe Spannung war die Folge der Erfüllung der Forderung, den Gasdruck so niedrig zu wählen, daß eben noch intensives Leuchten auf dem Wege der Kanalstrahlen auftrat. Die Forderung niedrigen Gasdruckes war zu dem Zweck zu erfüllen, daß die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle und somit der leuchtenden Linienträger hinter der Kathode möglichst groß war, und darum die Linienträger möglichst weit aus dem Erregungsgebiet (Kanalstrahlenlamelle) in die strahlenfreie Umgebung hineinfliegen konnten, ohne daß die Licht emittierenden Schwingungen ihrer Elektronen durch Zusammenstöße mit anderen Gasmolekülen gedämpft wurden. Die so gewählten Gasdrücke lagen ungefähr zwischen 0,03 und 0,01 mm; die mittlere freie Weglänge der Linienträger war somit von der Ordnung von 2,5–7,5 mm. Die Wegstrecken, auf welchen das Leuchten der Linienträger außerhalb der Kanalstrahlenlamelle merklich fort dauerte, waren selbst in den günstigsten Fällen nicht länger.

Zu der Angabe, daß ich in den meisten Fällen ein Induktorium als Stromquelle benutzte, habe ich noch nachzutragen, daß ich auch einige okulare und photographische Beobachtungen mit Gleichstrom bei 8000 Volt Kathodenfall durch-

fährte, um die Resultate nachzuprüfen und festzustellen, daß die Stromschwankungen des Induktoriums keinen Einfluß auf die beobachtete neue Erscheinung hatten. Der geringeren Spannung wegen mußte ich dabei freilich mit einem etwas höheren Gasdruck arbeiten und erhielt darum keine so scharfe Begrenzung der Kanalstrahlenlamelle. Wenn ich indes diesen Umstand berücksichtigte, stimmten die Beobachtungen mit den zwei Stromquellen gut überein.

Aus den Gründen, die in den nächsten Abschnitten dargelegt sind, ist es wichtig, daß die in der vorliegenden Untersuchung verwendeten Gase (Wasserstoff und Helium) rein sind. Zu diesem Zweck ist es vor allem notwendig, Verunreinigungen, die von den Glaswänden und Elektroden frei werden, vor den entscheidenden Aufnahmen zu beseitigen. Aus diesem Grunde wurde die Röhre jedesmal, nachdem sie bei einer Änderung ihrer Stellung mit Luft gefüllt gewesen war, mehrere Stunden lang unter starker Strombelastung mit Wasserstoff gespült, bis die H-Kanalstrahlen die für sie charakteristische Farbe dauernd beibehielten. Ferner war in die Leitung von der Pumpe zur Röhre dicht vor dieser ein Kühlgefäß mit Kohlen-säureschnee oder flüssiger Luft zur Beseitigung von Queck-silber- und Fettdämpfen eingeschaltet. Unter diesen Um-ständen erschien in den entscheidenden Aufnahmen der Wasser-stoff spektralanalytisch völlig rein, das Helium lediglich durch eine Spur Kohlenstoff und etwas Wasserstoff verunreinigt. Der Wasserstoff war indes in diesem Falle seines geringen Molekulargewichtes wegen nicht störend.

3. *Vorgänge hinter der Kanalstrahlenkathode.* — Bevor die Resultate über den Vergleich der Leuchtdauer verschiedener Serienlinien mitgeteilt werden, müssen die Vorgänge hinter der Kathode, soweit sie für das vorliegende Problem von Bedeutung sein können, klargestellt werden. Um den an ihnen nicht näher interessierten Leser nicht zu sehr zu ermüden, will ich der Besprechung dieser Vorgänge hier weniger Raum als Zeit und Mühe in meiner experimentellen Arbeit widmen und über aufklärende, zeitraubende Beobachtungen zum Teil gar nicht, zum Teil nur kurz berichten.

Zunächst seien die Gründe angegeben, aus denen ich Wasserstoff und Helium für die vorliegende Untersuchung auswählte und nur nebenher ein schwereres Gas wie Stick-stoff zur Aufhellung der spielenden Vorgänge untersuchte. Maßgebend für diese Auswahl war das kleine Molekulargewicht

des H_2 - und des He-Gases; umgekehrt der Quadratwurzel aus ihm ist ja die mittlere thermische Geschwindigkeit v eines Gasmoleküls und somit des Linienträgers, der nach dem Stoß von Seite eines Kanalstrahlenteilchens leuchtend aus der Kanalstrahlenlamelle dank seiner Geschwindigkeit herausfliegt. Und für eine gegebene Leuchtdauer T ist die Strecke $a = vT$, welche der Linienträger leuchtend zu durchfliegen vermag, proportional der Geschwindigkeit v . Im Falle des Heliums ist ohne weiteres einleuchtend, daß die mittlere Geschwindigkeit des Linienträgers gleich ist derjenigen des einatomigen He-Moleküls. Denn beide, Linienträger und Gasmolekül, haben in diesem Falle die gleiche Masse und, wie weiter unten dargelegt werden wird, überträgt ein stoßendes Kanalstrahlenteilchen auf einen Linienträger, der aus einem Gasmolekül gebildet wird, in den meisten Fällen keine merkliche Bewegungsgröße, wenn die Masse des stoßenden Teilchens gleich derjenigen des Linienträgers oder kleiner ist. Im Falle des Wasserstoffs ist aus demselben Grunde die Geschwindigkeit des Linienträgers, des positiven Atomions für die Serienlinien, des neutralen Atoms für die Bandenlinien¹⁾, gleich seinem Werte im zweiatomigen Molekül zu setzen, da er aus diesem durch den Stoß des Kanalstrahlenteilchens ohne Übertragung von Bewegungsgröße freigemacht wird und bis zum nächsten Stoß auf ein Gasmolekül jedenfalls angenähert mit der Geschwindigkeit im H_2 -Molekül weiterfliegt. Bei gleicher Temperatur in der Kanalstrahlenlamelle (unter den gewählten Bedingungen etwa 100° größer als die Zimmertemperatur) verhalten sich also die Geschwindigkeiten der aus der Kanalstrahlenlamelle herausfliegenden Träger einer H- und einer He-Linie wie $\sqrt{4} : \sqrt{2} = \sqrt{2} : 1$. Nachdem ich die Erscheinung der Zunahme der Leuchtdauer entlang einer Serie für den Fall des Wasserstoffs aufgefunden hatte, durfte ich hoffen, sie auch noch im Falle des Heliums nachweisen zu können, da in diesem die Geschwindigkeit der Linienträger nur wenig kleiner ist.

Der zweite Grund, aus dem ich Wasserstoff und Helium der vorliegenden Untersuchung unterwarf, ist der, daß diese beiden Elemente Spektralserien in dem meinen Spektrographen zugänglichen Gebiet besitzen, nämlich Wasserstoff eine erste Nebenserie (Balmerische Serie), Helium zwei Hauptserien, zwei erste und zwei zweite Nebenserien.

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 49. p. 179. 1916.

Die Verwendung von Kanalstrahlen zur Erregung von Lichtemission durch Stoß war zur Erfüllung der Forderung nötig, trotz des niedrigen Gasdruckes eine möglichst große Intensität der Lichtemission in dem Erregungsgebiet herzustellen. Bei den absichtlich gewählten Gasdrucken liefern schnelle Kathodenstrahlen, an deren Verwendung man auch denken könnte, eine sehr viel kleinere Lichtintensität in dem durchlaufenen Gas als Kanalstrahlen. Da für gewisse Linien die Verwendung von Kanalstrahlen schon 6 Stunden Belichtungszeit verlangte, so schieden für die vorliegende Aufgabe die Kathodenstrahlen als Leuchterreger aus.

Betrachtet man das Kanalstrahlenbündel, das die von mir verwendete Röhre liefert, hinter der Kathode parallel der Breitseite der aus dem Kathodenschlitz austretenden Lamelle, so erscheint diese bis auf 2–3 cm Abstand von der Kathode als leuchtende Schicht scharf gegen den über und unter ihr liegenden, im Verhältnis zu ihr dunklen Gasraum begrenzt und ebenso dick, wie der Schlitz in der Kathode hoch ist. Bei wachsendem Abstand von der Kathode wird jedoch die Begrenzung der Kanalstrahlenlamelle gegen den benachbarten Gasraum mehr und mehr unscharf und gleichzeitig wächst ihre Dicke, bis sie schließlich in ein bis zur Glaswand reichendes diffuses Lichtbündel ausgeartet ist. Diese scharfe Begrenzung der Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode tritt, wie ausdrücklich betont werden muß, in reinem Wasserstoff und Helium auf; über die Verhältnisse im Stickstoff wird weiter unten eine Bemerkung gemacht werden. Diese scharfe Begrenzung der Kanalstrahlenlamelle, also des Gebietes der Erregung von Leuchten durch Stoß, ist von Bedeutung für die vorliegende Untersuchung; eine geringere Schärfe der Begrenzung würde zwar den Vergleich verschiedener Glieder einer Serie hinsichtlich ihrer Leuchtdauer nicht ganz unmöglich machen, immerhin aber ein Element der Beunruhigung in die Deutung der gewonnenen Resultate hereinbringen und kaum eine Abschätzung der absoluten Leuchtdauer zulassen.

Über die Schärfe der Begrenzung der Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode werden die weiter unten mitgeteilten Spektrogramme dem Leser ein Urteil gestatten. Aus dem plötzlichen Absturz der Intensität zahlreicher von den Kanalstrahlen zur Emission gebrachter Linien

beim Übergang von der Kanalstrahlenlamelle zu dem benachbarten Gasraum folgt, daß jedenfalls weitaus der größte Teil der Kanalstrahlen in Wasserstoff und Helium innerhalb der scharfen Begrenzung der Lamelle unmittelbar hinter der Kathode verläuft.

Wenn nun auch mit dieser Feststellung die wichtigste Bedingung für die Ermöglichung der vorliegenden Untersuchung erfüllt erschien, so verlangte doch die Vorsicht gegenüber allen Möglichkeiten, auch Nebenerscheinungen an den Kanalstrahlen hinter der Kathode so weit in Erwägung zu ziehen und zu untersuchen, als sie für die Erregung der Lichtemission hinter der Kathode von Bedeutung sein können.

Da ist zunächst zu vermuten, daß auch im Falle des Wasserstoffs und Heliums bei niedrigem Gasdruck, also bei langem Dunkelraum des die Kanalstrahlen erzeugenden Glimmstromes ein kleiner Bruchteil verhältniß langsame Kanalstrahlen divergierend von der Kathode weg außerhalb der Lamelle schneller Kanalstrahlen verläuft. Denn, wie jetzt wohl feststeht, werden die Kanalstrahlen dadurch erzeugt, daß positive Ionen im Gebiet von der negativen Glimmschicht bis zur Kathode, also innerhalb des Kathodendunkelraumes auf längeren oder kürzeren Strecken vom elektrischen Feld beschleunigt werden; in der Achse der Röhre und in größerem Abstand von der Kathode sind die elektrischen Kraftlinien zweifellos geradlinig und parallel und so auch die Bahnen der von ihnen beschleunigten positiven Ionen; an dem Loch (Schlitz) in der Kathode sind sie dagegen gekrümmt. Hier vermögen darum nur die raschen Strahlen unbekümmert um die Krümmung der beschleunigenden Kraftlinien angenähert geradlinig ihre Bahn fortzusetzen; alle langsamen Strahlen, also alle, welche von Punkten unmittelbar vor der Kathode ihren Ausgangspunkt haben, werden der Richtung der nach den Lochkanten hin divergierenden Kraftlinien folgen und so hinter der Kathode mit um so größerer Divergenz auftreten, je kürzer der Kanal in der Kathode ist. Ich habe zwar für den Fall des Wasserstoffs keinen unmittelbaren Beweis für das Auftreten stark divergenter langsamer Kanalstrahlen außerhalb der Lamelle der schnellen Strahlen erbringen können, wohl aber konnte ich es im Falle des Heliums und noch überzeugender im Falle des Stickstoffs durch folgende Beobachtung wahrscheinlich machen.

Zwar nicht in reinem Wasserstoff, wohl aber in geringem

Betrag in Helium und viel mehr in Stickstoff wird die Aluminiumkathode durch die auf ihre Vorderseite auffallenden Kanalstrahlen zerstäubt; das so entstehende Al-Gas hat unmittelbar vor der Kathodenoberfläche seine größte Dichte, eine sehr viel kleinere in großem Abstand von der Kathode, etwa in der negativen Glimmschicht. Die aus dem Al-Gas infolge Ionisierung und Beschleunigung gebildeten Al-Kanalstrahlen gehen somit zum größten Teil von Punkten unmittelbar vor der Kathode aus, haben somit eine verhältniß kleine Geschwindigkeit und werden beim Durchtritt durch das divergente Kraftfeld an einem Kathodenkanal stark divergent hinter der Kathode. Diesen divergenten Al-Kanalstrahlen hinter der Kathode ist wohl das violette Al-Linienpaar λ 3962—3944 zuzueignen, das unter meinen Versuchsbedingungen in dem Spektrogramm der Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode im Falle des Stickstoffs und sehr schwach im Falle des Heliums auftritt. Diese Al-Linien besitzen nämlich nicht die Höhe der Kanalstrahlenlamelle, also nicht die Länge solcher Linien, die ausschließlich nur innerhalb der Lamelle zur Emission gebracht werden, sondern erstrecken sich in angenähert gleichmäßiger Schwärzung auf eine beträchtliche Strecke in den Raum über und unter der Lamelle. Fig. 1 auf Tafel III (Vergröß. 1:5) gibt eine Anschauung von der so erhaltenen Al-Linie λ 3962 im Verhältniß zu der N-Linie λ 3995, die nur innerhalb der Lamelle der schnellen Strahlen zur Emission gebracht wird. Ähnlich wie im Falle des Stickstoffs habe ich auch im Falle des Heliums, wenn auch nur schwach und nach langer Belichtung, die Al-Linien länger als die benachbarten He-Linien erhalten.

Die Richtigkeit der vorstehenden Folgerung über den Ursprung der verlängerten Al-Linien konnte ich durch eine Untersuchung der Lichtemission der Kanalstrahlenlamelle und ihrer Umgebung in Stickstoff bestätigen. Weil nämlich in diesem Gas für den gleichen Druck der Kathodendunkelraum kürzer als in Wasserstoff und Helium ist und weil in ihm ein-, zwei- und wahrscheinlich auch dreiwertige positive Ionen auftreten, so können in seinem Falle langsame Strahlen aus dem Raum unmittelbar vor der Kathode in größerem Verhältniß zu den schnellen Strahlen sich bilden. Aus diesem Grund umhüllt in Stickstoff die scharf umgrenzte Lamelle schneller Kanalstrahlen ein stark divergentes, unscharfes Bündel langsamer Strahlen. Hieraus und aus dem zusammen-

gesetzten Charakter des Linien- und Bandenspektrums ergeben sich mannigfaltige, interessante Erscheinungen bei der von mir angewendeten Methode. Ich habe diese Erscheinungen zwar ziemlich eingehend verfolgt; da sie indes mit dem Problem der Leuchtdauer von Serienlinien nicht zusammenhängen, so sehe ich hier von ihrer weiteren Besprechung ab und behalte mir die Mitteilung meiner Resultate in dieser Hinsicht für eine andere Gelegenheit vor.

So kurz dieser Vergleich meiner Beobachtungen an N-Kanalstrahlen mit denjenigen an H- und He-Kanalstrahlen ist, so läßt er uns doch die Gründe erkennen, warum im Falle des Wasserstoffs und Heliums die Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode so scharf begrenzt ist, und das sie umhüllende Bündel langsamer divergenter Strahlen, wenn es überhaupt da ist, eine verhältniß so geringe Intensität hat. Der eine Grund liegt darin, daß in Wasserstoff und Helium bei den von mir angewendeten niedrigen Drucken der Kathodendunkelraum verhältniß sehr lang ist, so daß weitaus der größte Teil der Kanalstrahlen von Punkten in großem Abstand von der Kathode ausgehen und somit eine so große Geschwindigkeit gewinnen kann, daß sie beim Durchtritt durch den Kanal in der Kathode nur wenig aus ihrer Richtung abgelenkt werden können. Der zweite Grund liegt darin, daß in Wasserstoff nur einfach geladene Kanalstrahlenteilchen auftreten und auch in Helium überwiegen.

Die vorstehenden Beobachtungen und Erwägungen lassen auch einen Grund erkennen, warum in meinen Beobachtungen über die Leuchtdauer von H- und He-Serienlinien für eine möglichst große Reinheit dieser Gase von der Beimischung schwerer Gase zu sorgen war. Es hatte dies nämlich zunächst im Interesse einer möglichst scharfen Begrenzung der Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode und einer möglichst kleinen Intensität eines sie umhüllenden Bündels langsamer Strahlen zu geschehen.

An die vorstehenden Darlegungen über die räumliche Verteilung der Kanalstrahlen hinter der Kathode, soweit sie durch die Verhältnisse vor dieser beeinflußt ist, sei die Betrachtung über das Hereinspielen ihrer Zerstreuung im Gas hinter der Kathode angeschlossen. Wie bereits oben bemerkt wurde, ist die Kanalstrahlenlamelle hinter der Kathode wohl bis auf 2—3 cm Abstand bei den gewählten Gasdrucken scharf

begrenzt, wird aber bei größeren Abständen mehr und mehr breit und diffus. Diese seitliche Ausbreitung der Kanalstrahlen rührt von ihrer Zerstreuung an Gasmolekülen auf ihrem Wege her. Beim Stoß auf diese unterliegen sie ablenkenden Kräften und, indem ein Kanalstrahlenteilchen zeitlich hintereinander eine Reihe von Stößen senkrecht zu seiner ursprünglichen Geschwindigkeitsachse erfährt, kann es um so weiter aus seiner Bahn abgelenkt werden, je weiter es läuft. Aus der nur allmählich erfolgenden Zerstreuung der Kanalstrahlen aus der vorne scharf umgrenzten Kanalstrahlenlamelle heraus läßt sich somit folgern, daß weitaus in den meisten Fällen der Stöße eines H- und He-Kanalstrahlenteilchens auf ein ruhendes H_2 - und He-Molekül die von dem Kanalstrahlenteilchen senkrecht zu seiner anfänglichen Geschwindigkeitsachse übernommene Bewegungsgröße klein ist im Vergleich zu seiner anfänglichen Bewegungsgröße. Gleichwohl müssen wir mit der Möglichkeit rechnen, daß hin und wieder auch ein Stoß vorkommt, in dem die übertragene transversale Bewegungsgröße von der Ordnung der anfänglichen longitudinalen Bewegungsgröße ist. Ist dies der Fall, dann tritt in diesem seltenen Falle eine starke Zerstreuung auch schon in der scharf umgrenzten Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode ein. Dies ist freilich nur möglich oder wahrscheinlich; jedenfalls aber haben den Beobachtungen gemäß die zerstreuten Kanalstrahlen ebenso wie die oben behandelten „divergenten“ Kanalstrahlen, wenn sie überhaupt da sind, nur eine sehr geringe Intensität im Vergleich zu den schnellen Kanalstrahlen innerhalb der scharf begrenzten Kanalstrahlenlamelle. Dies gilt wenigstens für Wasserstoff und Helium, die nicht durch den Zusatz von schwereren Gasen merklich verunreinigt sind. Denn, wie aus der Reflexion¹⁾ von Wasserstoffkanalstrahlen an festen Körpern zu folgern ist, kann ein H-Kanalstrahlenteilchen in zahlreichen Fällen bei dem Stoß auf ein schwereres Atom eine so große Änderung seiner Bewegungsgröße erfahren, daß diese sogar ihr Vorzeichen umkehrt. Aus diesem weiteren Grunde habe ich in meinen Beobachtungen dafür gesorgt, den Wasserstoff und das Helium in der Kanalstrahlenröhre frei von der Verunreinigung durch schwerere Gase zu halten.

1) W. Hermann u. S. Kinoshita, *Physik. Zeitschr.* 7. p. 564. 1906; J. Stark u. W. Steubing, *Ann. d. Phys.* 28. p. 995. 1909; E. Wagner, *Ann. d. Phys.* 41. p. 209. 1913; J. Stark, *Ann. d. Phys.* 42. p. 231. 1913.

Für das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es notwendig, die Kanalstrahlen, welche durch ihren Stoß auf Gasmoleküle diese zu Lichtemission anregen, soweit als möglich scharf und streng auf ihr Gebiet innerhalb der Lamelle unmittelbar hinter der Kathode zu beschränken. Auf Grund der Darlegungen über das mögliche Auftreten divergenter und zerstreuter Kanalstrahlen lassen sich die Bedingungen erkennen, welche für die Erreichung jenes Zieles am günstigsten sind. Man hat einmal den Schlitz in der Kathode nicht zu hoch zu wählen, um das elektrische Feld bei seiner vorderen Seite möglichst wenig inhomogen zu machen. Zweitens hat man den Schlitz lang zu wählen, damit sein hinteres Ende als Diaphragma die divergenten Strahlen nur in einem kleinen Öffnungswinkel austreten läßt; indes darf die Schlitzlänge auch nicht so groß werden, daß die Zerstreuung infolge der additiven Wirkung aufeinander folgender ablenkender Stöße merklich wird. In meinen Versuchen betrug die Höhe des Schlitzes in der Kathode 2 mm, seine Länge ebenfalls 2 mm. Nachdem ich einen Teil der Beobachtungen an Wasserstoff mit diesen Maßen durchgeführt hatte, behielt ich sie des Vergleiches wegen auch für die weiteren Aufnahmen bei. Wenn sie indes auch die Zuverlässigkeit der gewonnenen Resultate nicht beeinträchtigen, so muß ich doch bemerken, daß zu neuen Beobachtungen günstigere Maße gewählt werden können, nämlich als Höhe für den Kathodenschlitz 1 mm, als Länge 5 mm.

Die Vorgänge, welche die räumliche Verteilung der Kanalstrahlen hinter der Kathode betreffen, sind für das Ziel der vorliegenden Untersuchung am wichtigsten. Weitere Vorgänge hinter der Kathode werden in den folgenden Abschnitten bei der Beantwortung der Fragen nach dem Ursprung der Lichtemissionen hinter der Kanalstrahlenelektrode beleuchtet werden.

4. *Ursprung der Lichtemissionen innerhalb der Kanalstrahlenlamelle hinter der Kathode.* — Die Lichtemission einer Kanalstrahlenlamelle setzt sich im allgemeinen aus verschiedenen Teilen zusammen. Einmal bringen die bewegten Kanalstrahlenteilechen durch ihren Stoß auf verhältnißlich ruhende Gasmoleküle an sich selbst Spektrallinien zur Emission. Es sind dies Serienlinien; an ihnen läßt sich darum bei geeigneter Stellung von Sehlinie und Achse der Kanalstrahlen ein Dopplereffekt (bewegte Intensität) beobachten. Sodann treten neben

den bewegten Streifen der Serienlinien der Kanalstrahlen immer auch die ruhenden Serienlinien selbst auf, wenn wie unter den von mir gewählten Versuchsbedingungen die Kanalstrahlen in dem Gas verlaufen, aus dem sie vor der Kathode gebildet wurden. Wie ich an anderer Stelle¹⁾ nachwies, werden die ruhenden Serienlinien in einem Kanalstrahlenbündel unmittelbar durch den Stoß von Kanalstrahlen auf verhältnißlich ruhende Gasmoleküle an diesen oder vielmehr an den aus diesen gebildeten positiven Atomionen zur Emission gebracht. Da gerade an den ruhenden Serienlinien eines Kanalstrahlenbündels eine neue Erscheinung in der vorliegenden Arbeit aufgedeckt wird, so ist es wertvoll, daß jenes Resultat der früheren Untersuchung im folgenden neu bestätigt wird. Außerdem in Wirklichkeit praktisch allein wirksamen Stoß der Kanalstrahlen als Strahlungserreger könnte man nämlich, wenn man an das Problem herantritt, eine Quelle der Emission von ruhenden Serienlinien auch in dem Stoß der sekundären Kathodenstrahlen vermuten, welche von Kanalstrahlen bei ihrem Stoß auf verhältnißlich ruhende Atome des durchlaufenen Gases erzeugt werden können.

Dieselben zwei Ursachen der Erregung, Stoß der Kanalstrahlen oder Stoß der sekundären Kathodenstrahlen, kommen auch für die dritte Art von Lichtemission in Betracht, welche an einem Kanalstrahlenbündel in einem Gas sich beobachten läßt, welchem ein Bandenspektrum wie dem Wasserstoff oder Stickstoff eigentümlich ist. An anderer Stelle²⁾ habe ich bereits, eine Nebenuntersuchung der vorliegenden Arbeit vorwegnehmend, kurz gezeigt, daß auch die Bandenlinien innerhalb eines Kanalstrahlenbündels jedenfalls für den größten Teil ihrer Intensität unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen selbst, nicht der sekundären Kathodenstrahlen angeregt werden. Zur Ergänzung der früheren Mitteilung und zur weiteren Klarstellung der Vorgänge in der Kanalstrahlenlamelle hinter der Kathode sei hier folgendes über die Erregung der ruhenden Serien- und Bandenlinien in einem Kanalstrahlenbündel nachgetragen.

Dieser Nebenuntersuchung liegen, wie bereits dargelegt wurde, folgende Überlegungen zugrunde. Da die sekundären Kathodenstrahlen in und aus der von mir benutzten Kanal-

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 42. p. 163. 1913.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 49. p. 179. 1916.

strahlenlamelle, wenn sie überhaupt in merklicher Menge vorhanden sind, nach allen Richtungen diffus herauslaufen, so muß die von ihnen innerhalb und außerhalb der Lamelle angeregte Lichtemission in dem Spektrogramm der Lamelle von der beschriebenen Art aus dem Bild der Lamelle heraus in langsamem Abfall der Intensität in die Umgebung hinein um so weiter sich erstrecken, je weniger die sekundären Kathodenstrahlen von dem Gas absorbiert werden, je niedriger also dessen Druck ist. Wenn dagegen die Intensität der ruhenden Serien- und Bandenlinien an der Grenze der Kanalstrahlenlamelle von einem großen Wert innerhalb dieser plötzlich auf einen kleinen Wert außerhalb dieser abstürzt, so dürfen wir folgern, daß sie innerhalb der Lamelle zum weitaus größten Teil nicht durch die sekundären Kathodenstrahlen, sondern unmittelbar durch die Kanalstrahlen selbst zur Emission gebracht wird.

Die Voraussetzung dieser Folgerung ist nun, wie ich bereits mitteilte, Wirklichkeit im Falle der Bandenlinien des Wasserstoffs. Eine Anschauung von dem Absturz der Intensität der H-Bandenlinien beim Übergang von dem Bild der Lamelle nach ihrer Umgebung erlaubt die Wiedergabe eines vergrößerten Teiles eines meiner Spektrogramme in Fig. 2 (Vergröß. 1:5) auf Tafel III. Sie stellt das H-Bandenspektrum ungefähr zwischen H_β und H_δ dar. Es ist an ihm außerhalb des überlichteten Lamellenbildes oberhalb und unterhalb überhaupt keine Intensität der Bandenlinien wahrzunehmen und alle H-Bandenlinien hören scharf an der Grenze der Lamelle auf. Bei der Aufnahme des Spektrogramms war die Achse des Spaltrohres des Spektrographen so um 45° gegen die Achse der Kanalstrahlenlamelle geneigt, daß die Strahlen auf den Beobachter zuliefen. Nach Maßgabe der Dispersion des verwendeten Spektrographen (Prismenapparat) wurden darum bei den H-Serienlinien bewegter Streifen und ruhende Linie gegeneinander verschoben. Wegen der ungenügenden Dispersion ist indes diese Verschiebung des bewegten Streifens gegen die ruhende Linie nach Violett zu bei H_γ so gering, daß sie nicht getrennt erscheinen, sondern verschmolzen sind, und da die bewegte Intensität von H_γ im Verhältnis zu der einer Bandenlinie sehr groß ist, so ist sie sehr stark überlichtet und erstreckt sich darum aus photographischen Gründen aus dem Bilde der Lamelle, wie es durch die Bandenlinien gegeben wird, heraus. Günstiger liegen in dieser Hinsicht wegen der größeren

Dispersion und der kleineren Intensität die Verhältnisse bei H_β . Bei ihr beschränkt sich der bewegte Streifen angenähert auf die Bildfläche der Lamelle; dagegen ragt auch bei ihr die ruhende Linie beträchtlich nach unten und oben darüber hinaus. Diese Bemerkungen über das Aussehen von H_γ und H_β in dem wiedergegebenen Spektrogramm sollen nur dazu dienen, vor unrichtigen Folgerungen abzuhalten. Die Aufgabe des Spektrogramms bezieht sich lediglich auf das Bandenspektrum und soll veranschaulichen, wie dessen Intensität beim Übertritt von der Kanalstrahlenlamelle in die Umgebung plötzlich von einem großen Wert auf einen kleinen Wert abfällt. Auf Grund der früheren und der vorliegenden Ausführungen wird somit, denke ich, wohl jeder Leser überzeugt sein, daß weitaus der größte Teil der Intensität der H-Bandenlinien innerhalb eines Kanalstrahlenbündels in reinem Wasserstoff unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen selbst, nicht durch den Stoß von sekundären Kathodenstrahlen zur Emission gebracht wird.

Nach dieser Feststellung über die Erregung der Bandenlinien können wir uns der Frage der Erregung der ruhenden Serienlinien zuwenden. Die Beantwortung dieser Frage verlangt jedenfalls bei Wasserstoff die Anwendung einer so großen Dispersion, daß der bewegte Streifen und die ruhende Linie deutlich getrennt erscheinen. Zu diesem Zweck machte ich eine Reihe von Aufnahmen mit Hilfe eines Plangitterspektrographen, der bei H_α , H_β und H_γ eine für die vorliegende Aufgabe hinreichend große Dispersion besitzt, wenn auch seine Lichtstärke erheblich kleiner als diejenige des Prismenapparates ist. Wie die Vergrößerungen (1:8,3) so erhaltener Spektrogramme von H_α und H_β in Fig. 3 auf Tafel III erkennen lassen, besitzt die ruhende Linie dieselbe Höhe wie der bewegte Streifen, ihre Intensität innerhalb der Kanalstrahlenlamelle nimmt nach unten und oben beim Übertritt in die Umgebung plötzlich von einem großen Wert auf einen kleinen Wert ab. Ähnlich wie für die H-Bandenlinien dürfen wir darum auch für die ruhenden H-Serienlinien H_α und H_β folgern, daß sie in einem Kanalstrahlenbündel nicht durch den Stoß der sekundären Kathodenstrahlen, sondern unmittelbar durch den Stoß der Kanalstrahlen zur Emission gebracht werden.

Die Untersuchung der Serienlinien des Heliums in derselben Hinsicht ist dadurch erleichtert, daß es bei ihm nicht

notwendig ist, Spektrogramme für die Neigung von 45° der Kanalstrahlen gegen die Sehlinie aufzunehmen und so den bewegten Streifen von der ruhenden Linie zu trennen. Bei ihnen ist ja für reines Helium in der Kanalstrahlenröhre die bewegte Intensität¹⁾ erheblich kleiner als die ruhende und kann darum in erster Annäherung neben dieser vernachlässigt werden. Bei den spektralen Aufnahmen der Kanalstrahlenlamelle im Helium habe ich mich darum darauf beschränkt, die Sehlinie senkrecht zur Achse der Kanalstrahlenlamelle zu stellen. Wie nun weiter an der Hand der Figuren auf Tafel IV gezeigt werden wird, nimmt auch bei den ruhenden He-Serienlinien, wenigstens bei dem ersten und zweiten Glied einer jeden Serie, die Intensität von ihrem großen Wert innerhalb der Kanalstrahlenlamelle plötzlich auf einen kleinen Wert beim Übertritt aus der Lamelle in die Umgebung ab.

Bei den Gliedern höherer Nummer in der H-Serie und in den He-Serien beschränkt sich die Intensität nicht auf die Kanalstrahlenlamelle, sondern erstreckt sich in vergleichbarem Betrage etwas darüber hinaus. Gleichwohl ist auch bei ihnen die Abnahme der Intensität mit zunehmendem Abstand von der Kanalstrahlenlamelle so beträchtlich, daß sich auch für sie folgern läßt, daß sie nicht durch den Stoß der sekundären Kathodenstrahlen angeregt wird. Hierfür spricht auch die weiter unten erwähnte Tatsache, daß die He-Serienlinien in um so geringerer Intensität durch langsame Kathodenstrahlen angeregt werden, je höher ihre Gliednummer ist; werden also wie feststeht, die ersten Serienglieder nicht durch langsame sekundäre Kathodenstrahlen innerhalb eines Kanalstrahlenbündels erregt, so gilt dies erst recht von den höheren Gliednummern.

Die Feststellung, daß die ruhenden Serienlinien durch den Stoß von Kanalstrahlenteilchen auf Atome im durchlaufenen Gas zur Emission gebracht werden, kann allein für sich die Vermutung wachrufen, daß ein Gasatom, das von einem Kanalstrahlenteilchen gestoßen wird, nach dem Stoß, während es Licht emittiert, eine größere Geschwindigkeit als zuvor besitzt, daß es nämlich von dem stoßenden Kanalstrahlenteilchen Bewegungsgröße übernimmt. Ob diese Vermutung richtig ist, kann nur die Erfahrung entscheiden. Wie nun

1) J. Stark, A. Fischer u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 40. p. 499. 1913.

W. Wien¹⁾ und ich²⁾ gezeigt haben, wird bei den Geschwindigkeiten der Kanalstrahlen, falls die Kanalstrahlenteilchen auf nahezu gleich schwere Atome im durchlaufenen Gas stoßen, in der überwiegenden Mehrzahl der Stöße keine merkliche Bewegungsgröße auf das gestoßene Atom übertragen. Es ist somit gerechtfertigt, daß ich oben die Geschwindigkeit der von den Kanalstrahlen gestoßenen und zum Leuchten angeregten Atome gleich ihrer thermischen Geschwindigkeit vor dem Stoß gesetzt habe. Ich möchte freilich der Vorsicht halber zu dem Vorstehenden bemerken, daß die gemachte Feststellung nur für die überwiegende Mehrzahl der Stöße gilt. Für einen sehr kleinen Bruchteil derselben mag eine erhebliche Bewegungsgröße von dem stoßenden Kanalstrahlenteilchen auf das gestoßene Atom übertragen werden. Es liegt dann der bereits oben als möglich zugelassene seltene Fall starker Ablenkung oder Bremsung des stoßenden Kanalstrahlenteilchens vor.

5. *Ursprung der Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle hinter der Kathode.* — Am Schlusse des vorhergehenden Abschnittes habe ich kurz diejenige Emission höherer Serienglieder gekennzeichnet, welche sich etwas über die Kanalstrahlenlamelle hinaus erstreckt. Diese Erscheinung ist der Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung; sie wird in dem folgenden Abschnitt eingehend behandelt werden. Außer dieser Art von Lichtemission tritt nun außerhalb der Kanalstrahlenlamelle im Gas fast bis zur Glaswand, also bis zu 2 cm Abstand von ihr, eine weitere Lichtemission auf. Sie ist einmal dadurch gekennzeichnet, daß sie fast den ganzen Rohrquerschnitt erfüllt; ferner dadurch, daß sie in reinem Wasserstoff und Helium 10–20mal schwächer ist als die Emission der Kanalstrahlenlamelle selbst. Mit ausgeruhtem Auge kann man diese Lichtemission oberhalb und unterhalb der Kanalstrahlenlamelle unmittelbar hinter der Kathode in reinem Wasserstoff und Helium eben noch wahrnehmen. Projiziert man die Lamelle so, wie es oben für die spektrographischen Aufnahmen angegeben ist, auf den weit geöffneten Spalt eines lichtstarken Einprismenspektroskops, so kann man mit sehr gut ausgeruhtem Auge eine sehr schwache Emission der Linien H_{α} , H_{β} und der stärksten einander benachbarten und darum bei den gewählten Bedingungen zusammenfließenden blaugrünen

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 43. p. 955. 1914.

2) J. Stark, Ann. d. Phys. 42. p. 168. 1913.

H-Bandenlinien und in reinem Helium eine Emission der Linien 5876, 5016 und 4472 oberhalb und unterhalb des intensiven Bildes der Kanalstrahlenlamelle beobachten. Nach sechstündiger Belichtung erhielt ich mit Hilfe des lichtstarken Prismenspektrographen die H-Bandenlinien außerhalb der Lamelle auch auf der photographischen Platte, aber nur eben angedeutet; ihrer geringen Schwärzung wegen sind sie darum in der Wiedergabe einer solchen Aufnahme in Fig. 2 auf Tafel III nicht herausgekommen. Leichter sind die starken H- und He-Serienlinien außerhalb der Kanalstrahlenlamelle photographisch zu erhalten; doch kommen, wenn man das Hereinspielen der bereits erwähnten Emission der höheren Serienglieder außerhalb der Lamelle ausschließen will, für solche Aufnahmen bei Wasserstoff nur die Linien H_β und H_γ , bei Helium nur die Linien 5876, 5016 und 4472 in Betracht. Zudem darf man bei diesen Aufnahmen die Linien innerhalb der Lamelle nur wenig überlichten, weil sie sich sonst aus photographischen Gründen in das Gebiet oberhalb und unterhalb des Lamellenbildes verlängern. Berücksichtigt man dies, so erhält man im photographischen Negativ die Emission der genannten Serienlinien außerhalb der Lamelle zwar ebenfalls deutlich wahrnehmbar; bei der Reproduktion gehen aber neben den starken Linien der Lamelle selbst die unterlichteten Linien oberhalb und unterhalb von ihr verloren. Dies ist der Grund, warum bei H_β und H_γ in Fig. 3 auf Tafel III die Emission dieser Linien oberhalb und unterhalb des Lamellenbildes nicht herausgekommen ist. Um eine Anschauung von dem Verhältnis der Intensität einer Linie innerhalb zu derjenigen außerhalb der Kanalstrahlenlamelle zu geben, habe ich das Spektrogramm in Fig. 2 auf Tafel III zur Reproduktion ausgewählt. Bei seiner Aufnahme war nämlich noch eine Spur Quecksilberdampf in der Kanalstrahlenröhre vorhanden; infolgedessen erschien in ihm schwach die Hg-Linie 4359. Bei dieser Linie ist nun das Verhältnis der Intensität außerhalb zu derjenigen innerhalb der Lamelle nicht so klein wie bei den H-Banden- und den genannten H- und He-Serienlinien; darum ist wohl auch in der Reproduktion wahrzunehmen, daß sich an die stärkere Linie im Lamellenbild eine schwächere Linie oben und unten an sie anschließt. Für den Fall, daß dieses Verhältnis die Reproduktion nicht gut erkennen läßt, habe ich es in der nachstehenden Fig. 3 veranschaulicht, wie es

die starken H-Bandenlinien, H_β und H_γ und He λ 5016 und 4472 in reinem Wasserstoff und Helium erkennen lassen. Wie man sieht, ist an die intensive Linie innerhalb der Lamelle oben und unten eine sehr viel schwächere Linie angesetzt, deren Intensität langsam nach außen (nach der Glaswand zu) abnimmt.

Dies sind zunächst lediglich Beobachtungen. Für ihre Deutung kommen drei Möglichkeiten in Betracht. Erstens könnte man vermuten, daß die beschriebene Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle durch den Stoß der sekundären Kathodenstrahlen verursacht wird, welche aus der Lamelle heraus nach allen Richtungen emittiert werden. Ob diese Vermutung das Richtige trifft, ließ sich leicht prüfen. Ich schob ein homogenes Magnetfeld (Spule von 18 cm Radius 200 Windungen, Stromstärke bis zu 50 Amp.) über die Lamelle und die Kanalstrahlenkathode, und zwar so, daß die Kanalstrahlen wenigstens unmittelbar hinter der Kathode parallel den magnetischen Kraftlinien verliefen. Dann mußten alle sekundären Kathodenstrahlen, welche eine Anfangsgeschwindigkeit senkrecht zur Lamelle besaßen und von ihr weg in die Umgebung hineinfliegen wollten, in um so engeren Kreisen um die magnetischen Kraftlinien gewickelt werden, je stärker das Magnetfeld war. Wenn also die sekundären Kathodenstrahlen einen merklichen Bruchteil der Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle hervorbrachten, dann mußte diese Emission beim Einschalten des Feldes merklich abnehmen, beim Ausschalten merklich stärker werden. Ich führte derartige Beobachtungen mit dem Auge an einem lichtstarken Spektroskop durch; sie waren dadurch erschwert, daß das longitudinale Magnetfeld den Glimmstrom und damit die von ihm erzeugten Kanalstrahlen in der bekannten Weise etwas verstärkte. Um darum durch den Vergleich der Emission außerhalb der Lamelle mit derjenigen innerhalb dieser nicht getäuscht zu werden, blendete ich die letztere aus dem Gesichtsfeld. Das Resultat dieser für das Auge recht anstrengenden Beobachtungen, die zumeist mit Hilfe von konstantem Gleichstrom in der Kanalstrahlenröhre ausgeführt wurden, war folgendes: In reinem und auch in wenig verunreinigten Wasserstoff und Helium ließ sich eine Schwächung der Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle nicht mit Sicherheit feststellen, obwohl unter den gewählten Ver-



Fig. 3.

suchsbedingungen selbst Kathodenstrahlen von 60 Volt Geschwindigkeit auf einer Bahn von 1 mm Krümmungsradius innerhalb der Lamelle durch das Magnetfeld festgehalten worden wären. So kann gefolgert werden, daß in reinem Wasserstoff und Helium die sekundären Kathodenstrahlen, welche etwa von den Kanalstrahlen erzeugt werden, weder innerhalb noch außerhalb des Kanalstrahlenbündels eine merkliche Emission der H-Banden-, H- und He-Serienlinien veranlassen.

Mit dieser Feststellung für den Fall des reinen Wasserstoffs und Heliums will ich nicht behaupten, daß es Fälle gibt, in welchen die sekundären Kathodenstrahlen im Innern und in der Umgebung eines Kanalstrahlenbündels eine merkliche Lichtemission hervorrufen. So will ich hier eine Beobachtung in dieser Hinsicht erwähnen, zumal sie sich auf einen weiteren Vorgang hinter der Kanalstrahlenkathode bezieht. In den Kanalstrahlen strömt ja positive Ladung hinter die Kathode, und gelangt sie hier nicht in einen Metallkäfig, der mit der Kathode verbunden ist, so muß im stationären Zustand unter der Wirkung eines hinter der Kathode sich von selbst herstellenden elektrischen Feldes ein Strom positiver Ionen auf die Kathode zu und ein Strom negativer Ionen von ihr weg in der Stärke entgegengesetzt gleich dem positiven Kanalstrahlenstrom fließen; es muß mit anderen Worten die Kanalstrahlenelektrode für den Gasraum hinter ihr zur Kathode einer unselbständigen Strömung werden. In der bekannten Weise wird das Spannungsgefälle dieser Strömung unmittelbar vor der Kathode (Rückseite der Kanalstrahlenelektrode) am größten; laufen darum langsame Kathodenstrahlen gegen sie, so werden sie vom elektrischen Feld zurückgeworfen und es bildet sich in der Weise, wie ich dies an früherer Stelle¹⁾ beschrieben habe, ein sekundärer Kathodendunkelraum und davor eine sekundäre Glimmschicht aus, in welcher das Gas von den einfallenden und zurückgeworfenen Kathodenstrahlen zum Leuchten angeregt wird. In dieser Weise ist eine Erscheinung zu erklären, welche man in reinem Wasserstoff bei Gegenwart einer Spur Quecksilberdampf beobachtet. Blickt man nämlich in diesem Fall der Breitseite der Kanalstrahlenlamelle und der Rückseite der Kathode entlang, so beobachtet man anliegend an die Kathode einen dunkleren Raum und darauf folgend, mit ziemlich scharfer Grenze einsetzend, einen

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 13. p. 375. 1904.

stärker leuchtenden Saum. Dieser schwache Lichtsaum läßt sich durch ein der Kanalstrahlenlamelle paralleles Magnetfeld zum Verschwinden bringen; auch läßt er sich schon mit einem Stabmagneten mäßiger Stärke ablenken. Hieraus folgt, daß in ihm schwache Kathodenstrahlen verlaufen und Leuchten erregen. In reinem Wasserstoff ohne Quecksilberdampf konnte ich den beschriebenen Lichtsaum nicht beobachten. Dies mag sich daraus erklären, daß Quecksilberdampf ungleich Wasserstoff schon durch ganz langsame Kathodenstrahlen (8 Volt) zu Lichtemission angeregt wird.

Den beschriebenen Lichtsaum konnte ich auch dann nicht beobachten, wenn ich die aus der Kanalstrahlenkathode nach hinten austretenden Kanalstrahlen in 5 mm Abstand von ihr durch einen Schlitz in einen Käfig aus Aluminiumblech (Fig. 4) eintreten ließ, der mit der Kathode verbunden war, wenn also so eine

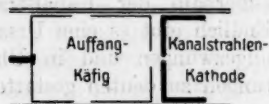


Fig. 4.

elektrische Rückströmung durch das Gas zur Kathode ausgeschaltet war. Bei dieser Versuchsanordnung trat gleichwohl in unvermindertem Betrag das schwache Leuchten oberhalb und unterhalb der Kanalstrahlenlamelle auf. Hieraus läßt sich folgern, daß auch im Falle der Anwesenheit des elektrischen Rückstromes zur Kathode jenes Leuchten nicht in merklichem Betrage von diesem veranlaßt sein kann.

Nachdem sich herausgestellt hatte, daß die sekundären Kathodenstrahlen in reinem Wasserstoff und Helium die schwache Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle nicht hervorrufen, konnte man die Ursache dieser Lichtemission in der Wiedervereinigung positiver und negativer Ionen außerhalb der Kanalstrahlenlamelle vermuten. Es läßt sich indes leicht zeigen, daß dann diese Wiedervereinigung nicht von getrennten positiven und negativen Ionen außerhalb der Lamelle ausgehen kann; denn wäre dies der Fall, so müßte ein elektrisches Feld zwischen der Rückseite der Kathode und dem Metallkäfig gemäß der in Fig. 4 dargestellten Anordnung zugleich mit den Ionen das Leuchten fortnehmen. Der Versuch lehrt indes, daß ein Feld von $300 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$ das Leuchten nicht in merklicher Weise verändert. Wollte man an der neuen Deutung festhalten, so müßte man sich dieser Beobachtung gegenüber auf die Annahme beschränken,

daß die außerhalb der Lamelle in der Wiedervereinigung begriffenen Ionen bereits innerhalb der Lamelle zu neutralen Quantenpaaren zusammengetreten sind, also außerhalb derselben unbeeinflussbar durch das elektrische Feld als neutrale Teilchen weiterfliegen. Ich gebe zu, daß eine solche Annahme zulässig ist. Ich halte sie indes in dem betrachteten Falle nicht für zutreffend. Denn auf Grund einer Überschlagerrechnung finde ich, daß die Lichtemission von Seite neutraler Quantenpaare, welche aus dem Innern der Kanalstrahlenlamelle herausfliegen, unmerklich schwach sein würde. Ferner würde die in Rede stehende Deutung wohl nur für die Emission der H-Banden-, nicht der H- und der He-Serienlinien außerhalb der Kanalstrahlenlamelle in Betracht kommen. Endlich gibt es eine Ursache dieser Lichtemission, welche sie ungezwungen und in Übereinstimmung mit allen Beobachtungen zu deuten gestattet.

An dritter Stelle haben wir nämlich die Ursache der schwachen Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle in den langsamen divergenten und zerstreuten Kanalstrahlen zu suchen, welche die Lamelle der intensiven schnellen Kanalstrahlen umhüllen. Wie ich oben in Abschnitt 3 darlegte, folgt aus der Art, wie die Kanalstrahlen vor der Kathode erzeugt werden und wie vor dieser an der Schlitzöffnung in ihr die elektrischen Kraftlinien verlaufen, notwendig das Auftreten stark divergenter langsamer Kanalstrahlen hinter der Kathode. Und an der Hand des Spektrogramms in Fig. 1 auf Tafel III konnte ich zeigen, wie in der Tat divergente Al-Strahlen hinter der Kathode ziemlich gleichmäßig den Rohrquerschnitt mit dem Licht erfüllen, das sie selbst emittieren: ebenso gleichmäßig über den Querschnitt verteilt werden diese langsamen divergenten Strahlen das Leuchten der von ihnen gestoßenen Gasatome anregen müssen. Mit dieser Folgerung und Erwartung sind nun alle Beobachtungen über das Leuchten außerhalb der Kanalstrahlenlamelle in Einklang. Erstens kann weder ein magnetisches Feld von 100 Gauss noch ein elektrisches Feld von $300 \text{ Volt} \times \text{cm}^{-1}$ die langsamen divergenten Kanalstrahlen, die sich ja aus positiven und neutralen Strahlen in einem wechselseitigen Gleichgewicht zusammensetzen, in Zusammensetzung und Verlauf unter den von mir in den obigen Versuchen gewählten Bedingungen merklich beeinflussen, und darum auch nicht, wie die Beobachtung bestätigt, das von

ihnen außerhalb der Lamelle hervorgerufene Leuchten. Zweitens vermögen die divergenten Kanalstrahlen als solche sowohl die Emission der H-Bandenlinien wie der ruhenden H- und He-Serienlinien durch ihren Stoß anzuregen, wie sie außerhalb der Lamelle sich beobachten läßt. Drittens steht diese Emission der H-Bandenlinien zu derjenigen der H-Serienlinien, wie ich mich überzeugt habe, ungefähr in demselben Intensitätsverhältnis, wie ich es für langsame Kanalstrahlen in früheren Versuchen feststellen konnte. Viertens nimmt auch, wie für langsame H-Kanalstrahlen schon länger bekannt ist, längs der H-Serie die Intensität der Emission außerhalb der Lamelle rasch mit steigender Gliednummer ab. Endlich wird wie die Intensität der langsamen divergenten Kanalstrahlen so auch die Intensität der Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle größer, wenn reinem Wasserstoff oder Helium eine geringe Menge eines schwereren Gases (Stickstoff, Kohlenwasserstoffe, Quecksilberdampf) beigemischt wird.

6. *Die Leuchtdauer der H- und He-Serienlinien nimmt zu mit steigender Gliednummer.* — Manchem Leser mag es scheinen, als ob ich der Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle, welche im vorhergehenden Abschnitt beschrieben ist, als einer untergeordneten Nebenerscheinung zuviel Aufmerksamkeit und Raum gewidmet habe. Indes schien es notwendig, über sie soweit Klarheit zu schaffen, daß man erkennen kann, daß in ihr keine Ursache der nunmehr zu beschreibenden Erscheinung zu suchen ist, welche den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet und eine prinzipielle Bedeutung besitzt. Und gerade der Vergleich der oben behandelten Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle („Streuleuchten“) mit der nunmehr zu behandelnden Art von Lichtemission außerhalb der Kanalstrahlenlamelle („Abklingeuchten“) läßt uns die Eigenschaften der letzteren besser zum Bewußtsein kommen. Während nämlich das Streuleuchten sich verhältniß weit in den Raum ober- und unterhalb der Lamelle erstreckt, setzt sich das Abklingeuchten nur eine sehr kurze Strecke über und unter die Lamelle fort. Während das Streuleuchten einer Serienlinie mehr als 20mal schwächer ist als ihre Intensität innerhalb der Kanalstrahlenlamelle, ist die Intensität des Abklingeuchtens einer Serienlinie außerhalb der Lamelle zwar ebenfalls erheblich schwächer als diejenige ihres Leuchtens innerhalb der Lamelle, aber doch von

derselben Größenordnung. Während das Streuleuchten längs einer Serie mit steigender Gliednummer langsam abnimmt, wächst das Abklingleuchten rasch an.

Mit diesem Vergleich sind die allgemeinen Eigenschaften des Abklingleuchtens bereits vorweggenommen. Nunmehr seien sie an einzelnen Beispielen veranschaulicht. Um das Abklingleuchten innerhalb der H-Serie an den ruhenden Linien untersuchen zu können, war es natürlich notwendig, die ruhenden Linien von den bewegten Streifen zu trennen, indem die Achse des Spektrographenspaltrohres um 45° gegen die Achse der Kanalstrahlenlamelle geneigt wurde. Derartige Aufnahmen machte ich zuerst mit einem lichtstarken Prismenspektrographen in erster Linie zum Zweck der Untersuchung der H-Bandenlinien. Dabei fiel mir zunächst auf, daß bei H_α die ruhende Linie merklich nach oben und unten über das Bild der Kanalstrahlenlamelle herausragte, während gleichzeitig sowohl benachbarte, nur wenig schwächere Bandenlinien, als auch der etwas intensivere bewegte Streifen von H_α selbst sich nicht über das Bild der Kanalstrahlenlamelle hinaus erstreckten. Dieser Vergleich ließ mich vermuten, daß ich in der ruhenden Linie von H_α den ersten Fall des gesuchten Abklingleuchtens vor mir habe. Meine nächste Überlegung war, was für ein einzelnes Glied einer Serie gelte, müsse qualitativ auch für die übrigen Serienglieder gelten, und da nach der Theorie des Abklingens eines leuchtenden Dipols die Abklingzeit proportional dem Quadrat der Wellenlänge zunimmt, so erwartete ich sogar, ohne mir genauere Rechenschaft davon zu geben, eine weitere Ausdehnung des Abklingleuchtens über das Lamellenbild hinaus bei den Linien H_γ , H_β und H_α . Die Aufnahmen mit dem Prismenapparat ließen diese Erwartung freilich nicht prüfen, da infolge der ungenügenden Dispersion ruhende Linie und bewegter Streifen bei diesen Seriengliedern nicht genügend getrennt waren. Ich wiederholte darum die Aufnahmen mit meinem Gitterapparat, dessen Dispersion für den vorliegenden Zweck ausreichte. Beim Vergleich von Aufnahmen, auf denen die ruhenden Linien von H_α , H_β , H_γ und H_δ ungefähr gleiche, und zwar normale Schwärzung hatten, ergab sich zu meiner Überraschung das Resultat, daß mit abnehmender Gliednummer das Abklingleuchten nicht weiter, sondern weniger weit von dem Lamellenbild weg sich erstreckt, so daß es bei H_β und H_α überhaupt nicht mehr mit Sicherheit nachzuweisen

ist. Freilich, dem Aussehen der Linie H_β auf diesen Aufnahmen durfte ich nicht ohne weiteres trauen, da in ihrem Gebiet mein Gitterapparat nicht mehr befriedigend scharf zeichnet; indes stimmte das Aussehen in der Hauptsache mit demjenigen auf den Prismenaufnahmen überein. Des Vergleiches wegen habe ich mich darum entschlossen, das Bild von H_β in Fig. 3 auf Tafel III neben demjenigen von H_α , H_γ und H_δ wiederzugeben. Ich hoffe, daß die Reproduktion den beschriebenen Unterschied in der Ausdehnung der ruhenden Linien der vier ersten (1, 2, 3, 4) Glieder der H-Serie erkennen lassen wird.

Nach der Auffindung der neuen Erscheinung in der Balmerischen H-Serie, die ja eine erste oder diffuse Nebenserie ist, lag die Vermutung nahe, daß sie in der ersten Nebenserie anderer Elemente, ja vielleicht allgemein in jeder Serie (Hauptserie, 2. und 3. Nebenserie) wiederkehrt. Zur Prüfung dieser Vermutung an der Hand der gewählten Versuchsanordnung kam aus den in Abschnitt 2 angegebenen Gründen nur Helium in Betracht. Dieses bot für das erstrebte Ziel den Vorteil, daß ich seine Serien mit Hilfe meines lichtstarken Prismenapparates ohne Trennung von ruhender Linie und bewegtem Streifen, also bei senkrechter Stellung von Sehlinie und Kanalstrahlenlamelle untersuchen konnte. Denn bei ihm ist, wie schon erwähnt wurde, die ruhende Intensität der Serienlinien in den Kanalstrahlen erheblich größer als die bewegte, so daß ich bei meinen Aufnahmen unter den gewählten Bedingungen die bewegte Intensität neben der ruhenden in ihrer Überlagerung in erster Annäherung vernachlässigen konnte. Je reiner nun in der Reihe der einander folgenden Aufnahmen das Helium wurde, je mehr darum das Streuleuchten außerhalb der Kanalstrahlenlamelle zurücktrat, desto deutlicher wurde die neue Erscheinung des Abklingleuchtens längs einer Serie an sämtlichen im untersuchten Spektralgebiet durch mehrere Glieder vertretenen He-Serien sichtbar.

Eine Anschauung der Erscheinung in der 1. Nebenserie der I. Gruppe der He-Serien ($He I$) gibt Fig. 5 auf Tafel IV. In ihr ist das Abklingleuchten bei dem 3. Serienglied $\lambda 4026$ unverkennbar ausgeprägt. Um einen etwa zweifelnden Leser davon zu überzeugen, daß das Abklingleuchten nicht etwa durch unscharfe Einstellung der verwendeten Optik oder durch fehlerhafte Reflexionen vorgetäuscht wird, habe ich in Fig. 4

auf Tafel IV neben λ 4026 das Lamellenbild der noch weiter im Violett liegenden Linie He λ 3889 gesetzt. Als 2. Glied der He I-Hauptserie zeigt sie trotz größerer Intensität innerhalb der Lamelle nicht ein gleich intensives Abklingleuchten außerhalb derselben wie λ 4026.

Ein drittes Beispiel für das Auftreten der neuen Erscheinung bietet die 1. Nebenserie in der II. Seriengruppe (He II) des Heliums. An ihr konnte ich sie zudem, wie Fig. 6 auf Tafel IV erkennen läßt, ein Serienglied weiter verfolgen; wie man sieht, erstreckt sich beim 4. Serienglied (λ 4144) das Abklingleuchten noch viel weiter über die Kanalstrahlenlamelle hinaus wie beim 3. Glied.

Zwar nicht so eingehend wie bei der 1. Nebenserie, aber doch immerhin auch überzeugend, konnte ich die neue Erscheinung in einer Hauptserie und einer 2. Nebenserie feststellen, nämlich bei der Hauptserie der II. Seriengruppe des Heliums (He II, Fig. 7 auf Tafel IV) und bei der 2. Nebenserie der I. Gruppe (He I, Fig. 8 auf Tafel II). Wie diese Figuren erkennen lassen, sind nämlich die 3. Glieder in diesen Serien deutlich länger als die 2. Glieder und überragen die Bildhöhe der Kanalstrahlenlamelle. Das 1. und 4. Glied der He II-Hauptserie (im Ultrarot und Ultraviolett) lagen außerhalb des Bereiches meines Spektrographen; das 1. und 4. Glied der 2. He I-Nebenserie wurden von ihm nicht genügend lichtstark geliefert.

Im vorstehenden habe ich zunächst meine Beobachtungen über die neue Erscheinung beschrieben, nämlich über das Auftreten von Lichtemission in H- und He-Serienlinien außerhalb des Erregungsgebietes, also außerhalb der Kanalstrahlenlamelle, aber doch in engem Anschluß an sie. Nunmehr sei diese Erscheinung gedeutet. Dies kann nach der vorausgeschickten Zergliederung der Vorgänge hinter der Kanalstrahlenelektrode nicht viel Schwierigkeiten machen. Gemäß den aufgezählten Unterschieden zwischen dem Streuleuchten und dem Abklingleuchten ist es nicht möglich, anzunehmen, daß das Abklingleuchten der Serienlinien höherer Gliednummer durch divergente langsame Kanalstrahlen bewirkt wird, welche in beträchtlicher Intensität und in geringer Divergenz das parallele Bündel schneller Kanalstrahlen umhüllen. Denn wäre dies der Fall, so müßte das Abklingleuchten in erhöhtem Maße bei den ersten Seriengliedern und bei den H-Banden-

linien auftreten, da diese von langsamen Kanalstrahlen verhältnißlich in größerer Intensität angeregt werden als die Serienglieder höherer Nummer.

Sodann könnte man die Vermutung äußern, daß das beschriebene Abklingleuchten durch sehr stark absorbierbare, also durch sehr langsame Kathodenstrahlen angeregt werde. Dann müßten wieder die Serienglieder höherer Nummer durch die langsamen Kathodenstrahlen stärker als die ersten Serienglieder angeregt werden. In Wirklichkeit ist, wie H. Rau¹⁾ für die He-Serien gezeigt hat, gerade das Umgekehrte der Fall.

Soviel ich sehen kann, ist die neue Erscheinung nur auf Grund der Idee zu deuten, welche den Ausgang der vorliegenden Untersuchung bildet, daß nämlich die Träger von Linien zunächst innerhalb der Kanalstrahlenlamelle durch den Stoß von Kanalstrahlen zum Leuchten in ihren Serien angeregt werden, dann dank ihrer thermischen Geschwindigkeiten zum Teil aus der Kanalstrahlenlamelle herausfliegen und entlang der Reihe ihrer Linien für verschiedene Serienglieder verschieden lang das Leuchten fortsetzen. Zählt man darum die Leuchtdauer einer Serienlinie von dem Stoß von Seite eines Kanalstrahlenteilchens bis zu dem Moment, in welchem die abnehmende Intensität einen bestimmten noch merklichen Bruchteil der zuvor erreichten maximalen Intensität erreicht hat, so kann man aus den beschriebenen Beobachtungen folgern, daß die Leuchtdauer der aufeinanderfolgenden Glieder einer Serie mit steigender Gliednummer zunimmt. Diese Folgerung läßt, wie ich ausdrücklich bemerken möchte, die Frage offen, ob die maximale Intensität während des zeitlichen Verlaufes der elementaren Emission unmittelbar nach der Stoßerregung vorhanden ist oder erst einige Zeit darnach in mehr oder minder schnellem Anwachsen der Amplitude erreicht wird, ob also die Intensität der Emission eines Trägers in einer bestimmten Linie eine exponentielle Funktion der Zeit ($J_0 e^{-kt}$) unmittelbar von dem erregenden Stoß ab oder eine verwickeltere Funktion der Zeit ist; ferner läßt sie die Frage offen, ob alle Glieder derselben Serie ihre maximale Intensität zu derselben Zeit, etwa unmittelbar nach dem Stoß, haben oder sie der Reihe nach zu verschiedenen Zeiten erreichen, ob also in der Zeitfunktion der Intensität einer Serienlinie die Gliednummer als maßgebender Parameter enthalten ist.

1) H. Rau, Ber. d. Physik.-Med. Ges. Würzburg 1914.

7. Die Leuchtdauer der Li-Serienlinien nimmt ebenfalls zu mit steigender Gliednummer. — Es ist möglich, daß die beschriebene neue Erscheinung des zeitlichen Verlaufes der elementaren Lichtemission in einer Spektralserie einmal für die Erkenntnis der Dynamik der Serienelektronen eine grundlegende Bedeutung gewinnen wird. Darum erscheint es wünschenswert, daß sie auch nach einer zweiten Methode womöglich an den Serien eines dritten Elementes nachgewiesen werde. Die Möglichkeit hierzu bietet nun eine Erscheinung, welche bereits seit längerer Zeit bekannt ist, nämlich die Emission von Serienlinien an der Oberfläche von Alkalisalzen, auf welche genügend schnelle Kanalstrahlen auffallen. Wie ja von mir und G. Wendt¹⁾ nachgewiesen und bei der elektrischen Zerlegung²⁾ so emittierter Serienlinien bestätigt wurde, spielt sich diese Emission unmittelbar vor der festen Oberfläche im Gasraum ab. Und ich habe die Vermutung geäußert, daß jedenfalls ein Teil dieser Emission dadurch zustande kommt, daß die Linienträger (Atomionen) durch den Stoß der Kanalstrahlenteilchen auf die feste Salzfläche zum Leuchten angeregt werden und dann leuchtend in den Gasraum vor der Salzfläche hinausfliegen. Freilich ist möglich und sicher auch wirklich, daß die fortfliegenden Linienträger im Gasraum erneut von Kanalstrahlen gestoßen und zum Leuchten angeregt werden. Aber wir wollen zunächst von diesem Vorgang absehen und die eben geäußerte Vermutung über das Abklingen des Leuchtens der aus der Salzfläche herausgeschleuderten Linienträger weiter verfolgen. Sie kann experimentell mit Hilfe folgender Versuchsanordnung geprüft werden.

Der Rückseite einer mit vielen 0,8 mm weiten Löchern versehenen Kathodenfläche von 5 cm Durchmesser sei (vgl.

Fig. 5) parallel in 3–6 mm Abstand eine ebene, auf einen Eisenteller aufgeschmolzene Schicht von Lithiumchlorid gegenübergestellt. Der Gasdruck über der Salzfläche sei sehr klein (0,05 bis 0,01 mm); es sollen auf sie aus den Löchern in der Kathode heraus rasche Sauerstoffkanalstrahlen fallen. Dann ist vor der Salz-



Fig. 5.

1) J. Stark u. G. Wendt, Ann. d. Phys. 38, p. 669. 1912.

2) J. Stark u. H. Kirschbaum, Ann. d. Phys. 43, p. 1017. 1914.

fläche bis auf einen Abstand von ihr, der klein ist im Verhältnis zum Durchmesser des sie treffenden Kanalstrahlenbündels, die spezifische Zahl der Linienträger nahezu konstant, unabhängig vom Abstand von der Salzfläche. Und leuchten die aus der Salzfläche kommenden Li-Linienträger ausschließlich nur infolge des Stoßes bei der Abtrennung von der Salzfläche, so muß in den aufeinander folgenden Ebenen parallel der Salzfläche längs der Normalen zu dieser die Intensität der Li-Linien von der Salzfläche weg abnehmen, aber um so langsamer, je größer die Leuchtdauer einer Linie ist. Nun werde die vor der Li-Salzfläche liegende Gasschicht in derselben Weise wie oben die Kanalstrahlenlamelle verkleinert so auf den Spektrographenspalt abgebildet, daß die Salzoberfläche senkrecht zum Spalt steht, ihr einfarbiges Bild also im Spektrogramm als ein Punkt erscheint und die Reihe der vor ihr liegenden Ebenen ebenfalls als eine Reihe aufeinander folgender Punkte. Wenn dann in derselben Weise wie bei den H- und He-Serien längs einer Li-Serie die Leuchtdauer eines Gliedes mit steigender Nummer zunimmt, so wird eine jede Li-Linie im Spektrogramm unter den gewählten Bedingungen an ihrem einen auf der Salzfläche aufsitzenden Ende am intensivsten sein; von diesem Ende weg wird die Intensität nach dem anderen Ende zu abnehmen, indes um so langsamer, je höher die Gliednummer der Linie in der Serie ist. Die Abnahme der Intensität von dem einen Ende zum anderen wird sich außer in der Größe der Schwärzung in bekannter Weise photographisch auch in der Breite der Linie ausdrücken; es wird nämlich diese an dem auf der Salzfläche sitzenden Ende am größten sein und von da nach dem anderen Ende zu abnehmen. An dieser Variation der Schwärzung und der Breite einer Li-Linie mit dem Abstand von ihrem auf der Salzfläche sitzenden Ende wird nichts geändert, wenn, wie es in Wirklichkeit der Fall ist, auf sie eine auf ihrer ganzen Länge gleich intensive und somit gleich breite Linie infolge davon gelagert wird, daß die Linie von einer Anzahl von Li-Atomen durch den Stoß von Kanalstrahlen im Gasraum angeregt wird.

Auf Grund der vorstehenden Überlegungen und mit Hilfe der beschriebenen Versuchsanordnung habe ich eine Reihe von Aufnahmen der Li-Serien gemacht; zudem standen mir als Material die früheren Aufnahmen zur Verfügung, die ich und Hr. Lüsse mit nahezu derselben Versuchsanordnung

zum Zweck der elektrischen Zerlegung die Li-Linien gewonnen hatten. In Fig. 10 auf Tafel IV (Vergrößerung 1:8,3) sind aus meinen neuen Aufnahmen die drei ersten Glieder der 1. Li-Nebenserie wiedergegeben. Wie man wohl deutlich erkennen kann, nimmt, ganz in Übereinstimmung mit den obigen Folgerungen die Schwärzung und die Breite, also die Intensität einer jeden Linie von dem einen Ende der Linie (Salzfläche) nach dem anderen Ende ab, indes, um so langsamer, je höher die Gliednummer ist. Um zu zeigen, daß diese Erscheinung nicht durch die verwendete Optik vorgetäuscht wird, habe ich in Fig. 9 auf Tafel IV die noch weiter im Violett liegende Al-Linie λ 3962 wiedergegeben, welche ich auf demselben Spektrogramm wie die Li-Linie λ 4132 erhalten habe. Wie man sieht, setzt sich diese Linie aus einem verdickten Punkt an der Salzfläche und einem bis zum anderen Ende gleich dicken Strich zusammen; der verdickte Punkt gibt die Lichtemission der aus der Salzschrift kommenden Linienträger, deren Leuchten schon in nächster Nähe der Schicht verlöscht; der gleichmäßig dicke Strich gibt das Leuchten der von der Kathode kommenden Al-Kanalstrahlen und der Al-Atome, welche zwischen Salzfläche und Kathode durch den Stoß von Kanalstrahlen zu Lichtemission angeregt werden.

Zur Deutung der beschriebenen Intensitätsverteilung längs der Li-Linien kann man verschiedene Möglichkeiten erwägen. Ich fürchte indes, mit ihrer ausführlichen Besprechung den Leser zu ermüden. So beschränke ich mich auf die Erklärung, daß ich von allen Deutungen, die ich in Betracht gezogen habe, nur die eine als haltbar gefunden habe, welche folgert oder voraussetzt, daß längs einer Spektralserie die Leuchtdauer einer Linie, gerechnet vom erregenden Stoß ab, mit steigender Gliednummer zunimmt.

Außer an der ersten Li-Nebenserie habe ich die neue Erscheinung auch an der zweiten und an der dritten Li-Nebenserie durch den Vergleich des zweiten Gliedes mit dem dritten Glied festgestellt. Sie ist somit nachgewiesen an vier ersten Nebenserien (eine von H, zwei von He, eine von Li), an zwei zweiten Nebenserien (je eine von He und Li), an einer dritten Nebenserie (Li) und an einer Hauptserie (He). Somit dürfen wir folgern, daß die neue Erscheinung eine allgemeine Eigenschaft aller Spektralserien darstellt.

8. Berechnung einer oberen Grenze der Leuchtdauer von

H-Bandenlinien und von H- und He-Serienlinien. — Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung ist in der Hauptsache eine qualitative, nämlich die Beantwortung der Frage, ob für die aufeinanderfolgenden Glieder einer Serie die Leuchtdauer mit steigender Nummer zu- oder abnimmt; immerhin aber läßt sie in quantitativer Hinsicht doch bereits die Feststellung einer oberen Grenze für die Leuchtdauer einer Serienlinie zu. Man kann zu diesem Zwecke folgende Überlegungen in erster Annäherung an die Wirklichkeit anstellen.

Die ungeordnete thermische Bewegung der Gasmoleküle und somit der Träger der ruhenden Serienlinien in der von mir verwendeten Kanalstrahlenlamelle werde gedanklich so ersetzt, daß sich gleich viele Linienträger in den zwei Richtungen dreier aufeinander senkrechter Achsen bewegen. Die eine dieser Achsen falle zusammen mit der Sehlinie, die andere mit der Achse der Kanalstrahlenlamelle, die dritte stehe also senkrecht zu dieser. Die in letzter Achse nach aufwärts sich bewegenden Linienträger tragen also ihre Lichtemission aus der Lamelle heraus fort in den Raum darüber und setzen so ihre Serienlinie nach oben über das Lamellenbild fort; die in derselben Achse nach abwärts laufenden Linienträger liefern die Verlängerung ihrer Serienlinie über die Lamelle hinaus nach unten. Ist die spezifische Zahl der in einer Achsenrichtung laufenden Linienträger n , so ist die Intensität der oberen und unteren Verlängerung einer Serienlinie proportional n ; die Intensität der Serienlinie innerhalb der Kanalstrahlenlamelle dagegen ist, wie leicht zu sehen ist, proportional $6n$. Würde also die Lichtintensität der Linienträger zeitlich konstant sein, so würde sich die Intensität der Verlängerung der Serienlinien zu der Intensität der Mitte der nicht zu dünnen Lamelle wie 1:6 verhalten. Wenn dagegen, wie es in Wirklichkeit der Fall ist, die Lichtintensität der Linienträger nach dem erregenden Stoß mit der Zeit sich ändert, so hängt jenes Verhältnis von der Zeitfunktion der Serienlinien ab und, solange diese nicht bekannt ist, läßt sich die oben definierte Leuchtdauer der Serienlinie nicht berechnen. Als solche wurde ja oben die Zeit definiert, welche von dem erregenden Stoß ab vergeht, bis die Intensität der Linie auf einen bestimmten Bruchteil ($\frac{1}{2.7}$) ihres maximalen Wertes abgenommen hat. Immerhin läßt sich eine scheinbare Leuchtdauer auf Grund der Annahme berechnen, daß das Maximum der Intensität

der Serienlinie unmittelbar nach dem erregenden Stoß auftritt und die Intensität gemäß der bekannten Exponentialfunktion ($J = J_0 e^{-kt}$) mit wachsender Zeit abnimmt. Im stationären Zustand ist dann die Intensität im Innern der Lamelle proportional $J_0/2$, dicht ober- und unterhalb der Lamelle etwas kleiner als proportional $J_0/6 e^{-kt}$ bei nicht zu großem k . Die Intensität $J_0/2,7$ wird somit angenähert in einem Punkte außerhalb der Lamelle erreicht, in welchem die Intensität

$$\frac{J_0}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 2,7}$$

auftritt, also zu der Intensität im Innern der Lamelle wie 1:8,2 sich verhält. Die Zeitdauer T der Bewegung von der Lamellengrenze bis zu diesem Punkt (Abstand a , Geschwindigkeit v , $T = a/v$) ist angenähert gleich der Leuchtdauer

$$T = \frac{1}{k} \left(\text{für } J = \frac{J_0}{2,7} \right).$$

Die so bestimmte scheinbare Leuchtdauer ist, wie sich uns schwer zeigen läßt, größer als die wirkliche Leuchtdauer in dem Falle, daß der maximale Wert der Intensität einer Serienlinie nicht unmittelbar nach dem erregenden Stoß, sondern erst merkliche Zeit später sich einstellt.

Zum Zweck der angenäherten Berechnung der scheinbaren Leuchtdauer einer Serienlinie hat man also für die von mir gewählten Versuchsbedingungen in ihrer Fortsetzung über das Lamellenbild hinaus den Punkt im Spektrogramm aufzusuchen, in welchem die Schwärzung um so viel kleiner ist als die (normale) Schwärzung im Lamelleninnern, daß sich daraus das Intensitätsverhältnis 1:8 ergibt; für die von mir verwendete Plattensorte¹⁾ (Agfa, Wratten-Wainright) muß darum diese Schwärzungsdifferenz angenähert 1,9 sein. Der Abstand a jenes Punktes von der Lamellengrenze von dem Wert im Bild, umgerechnet auf den Wert im Objekt, hat man dann mit der mittleren thermischen Geschwindigkeit v der Linienträger zu dividieren, um angenähert die Leuchtdauer $T = a/v$ zu erhalten. In dieser Weise sind die nachstehenden Zahlen für H- und He-Serienlinien berechnet worden. Hierbei ist die Temperatur des vom Kanalstrahlen durchlaufenen Gases für die Berechnung von v zu 127°C. angenommen.

1) Bezüglich der Methode vgl. J. Stark u. H. Lunelund, Ann. d. Phys. 46. p. 68. 1915.

In Wasserstoff ist unter den von mir gewählten Versuchsbedingungen $v = 2,2 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$, für H_α und H_β , $a < 0,1 \text{ cm}$, also Leuchtdauer $T < 4 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$; für H_γ ist a merklich, ungefähr gleich $0,05 \text{ cm}$, also wohl nur wenig kleiner als $2 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$. Für H_δ ist die scheinbare Leuchtdauer erheblich größer, nämlich ungefähr gleich $4 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$. Für die intensiven H-Bandenlinien im Blau und Violett ist $T < 4 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$.

In Helium ist für $v = 1,5 \cdot 10^5 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$ die scheinbare Leuchtdauer von D_3 (5876) und auch für das nächste Serienglied (λ 4472) erheblich kleiner als $6 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$; diejenige des dritten Gliedes derselben Serie ist dagegen von der Ordnung $9 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$.

Eine obere Grenze für die Leuchtdauer der ersten zwei Glieder einer Serie ist demnach der Wert $4 \cdot 10^{-7} \text{ sec}$. Eine untere Grenze dafür läßt sich aus den Angaben über die Halbwerte einer Serienlinie berechnen. Wird nämlich ihre Emission im einzelnen für sich schwingenden Dipol lediglich durch Ausstrahlung gedämpft, so folgt ja hieraus eine Halbwerte¹⁾ der Linie

$$\Delta\lambda = \frac{k\lambda^2}{16\pi^2 c},$$

wo λ die Wellenlänge in Zentimetern, c die Lichtgeschwindigkeit, $1/k$ die Abklingzeit der Intensität gemäß der Formel $J = J_0 e^{-kt}$ bedeutet, und somit als Leuchtdauer

$$T = \frac{1}{k} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 c \Delta\lambda}.$$

Nun haben Fabry und Buisson²⁾ die Halbwerte der He-Linie 5876 bei 190° abs. gemessen und den beobachteten Wert noch genau mit der berechneten thermokinetischen³⁾ Halbwerte in Übereinstimmung gefunden. Die Verbreiterung der Linie infolge der Strahlungsdämpfung war also noch unmerklich, verglichen mit der thermokinetischen Verbreiterung. Wir dürfen somit die Halbwerte jener Linie infolge Strahlungsdämpfung kleiner als $1/100$ thermokinetische Halbwerte setzen, nämlich

$$\Delta\lambda < \frac{1}{100} \cdot 1,07 \cdot 10^{-10} \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ cm}.$$

1) Vgl. z. B. W. C. Mandersloot, *Jahrb. d. Rad. u. El.* **13**, p. 1. 1916.

2) Ch. Fabry u. H. Buisson, *Compt. rend.* **154**, p. 1224. 1912.

3) Vgl. J. Stark, Bericht über die Verbreiterung von Spektrallinien, *Jahrb. d. Rad. u. El.* **12**, p. 349, 1915.

Hieraus berechnet sich als untere Grenze der Leuchtdauer von D_3 der Wert $7 \cdot 10^{-10}$ sec.

Die Zusammenstellung folgender Werte ist nicht ohne Interesse. Untere Grenze der Leuchtdauer T von D_3 gemäß vorstehender Berechnung:

$$T > 7 \cdot 10^{-10} \text{ sec};$$

Leuchtdauer T eines für sich schwingenden und strahlenden Dipols mit der Wellenlänge $5 \cdot 10^{-5}$ cm gemäß Abschnitt 1:

$$T = 1 \cdot 10^{-8} \text{ sec};$$

obere Grenze der Leuchtdauer von D_3 gemäß der vorliegenden Untersuchung:

$$T < 6 \cdot 10^{-7} \text{ sec}.$$

9. *Bedeutung der Leuchtdauer der Glieder einer Serie für das Verhältnis ihrer bewegten Intensitäten in den Kanalstrahlen.*

— Die Vorgänge in einem Kanalstrahlenbündel sind heutzutage vor allem Dank den bahnbrechenden Untersuchungen W. Wiens weitgehend aufgeklärt. So steht fest, daß zwischen den positiven und neutralen Strahlen auf Grund der Neutralisierung jener und der Selbstionisierung dieser bei Zusammenstoßen mit Gasmolekülen ein Gleichgewicht besteht. Es ist von W. Wien¹⁾ J. Koenigsberger und J. Kutschewski²⁾ sogar die mittlere freie Weglänge eines Kanalstrahlenteilchens zwischen zwei aufeinander folgenden Umladungen experimentell ermittelt worden. Auf der mittleren freien Weglänge vermag ein Kanalstrahlenteilchen in den ihm eigentümlichen Frequenzen bewegte Intensität zu emittieren; diese Lichtemission erhält unmittelbar oder mittelbar ihre Anregung durch den Zusammenstoß am Anfang der freien Weglänge und bricht ab infolge der Umladung am Ende der freien Weglänge. An anderer Stelle³⁾ habe ich bereits auf die Bedeutung der mittleren Lebensdauer eines Kanalstrahlenteilchens, also des Verhältnisses der mittleren Weglänge zur Geschwindigkeit des Kanalstrahlenteilchens, für seine Lichtemission hingewiesen. Dieser Begriff der Lebensdauer eines Kanalstrahlenteilchens

1) W. Wien, Berl. Akad. 27. Juli 1911; Ann. d. Phys. **39**, p. 528. 1912.

2) J. Koenigsberger u. J. Kutschewski, Ann. d. Phys. **39**, p. 161. 1912.

3) J. Stark, Ann. d. Phys. **49**, p. 179. 1916.

gewinnt im Zusammenhang mit der Leuchtdauer der Glieder einer Serie neue Bedeutung auf Grund folgender Überlegung.

Bleibt die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen ungeändert und wird lediglich der Druck des Gases geändert, in dem sie verlaufen, so bleibt die Art ihrer Zusammenstöße mit verhältnissmäßig ruhenden Gasmolekülen ungeändert; es nimmt indes mit steigendem Gasdruck ihre freie Weglänge und somit ihre Lebensdauer ab. Wenn darum die Leuchtdauer gewisser Serienlinien, welche von den Kanalstrahlen in bewegter Intensität emittiert werden, größer ist als die Lebensdauer ihrer Träger (Kanalstrahlen), und wenn längs einer Serie die Leuchtdauer mit steigender Gliednummer zunimmt, so kann von der größtmöglichen Energie, welche von einem Linienträger bei sehr großer Lebensdauer ausgestrahlt werden könnte, nur ein um so kleinerer Betrag in einer Serienlinie emittiert werden, je größer ihre Leuchtdauer ist. Und infolge der Abkürzung der Lebensdauer durch Erhöhung des Gasdruckes muß die Intensität einer Serienlinie im Verhältnis zur Intensität einer Linie derselben Serie von niedrigerer Gliednummer kleiner werden. Läßt man also z. B. H-Kanalstrahlen von konstanter Geschwindigkeit einmal in Wasserstoff von niedrigem Druck, sodann in Wasserstoff von höherem Druck verlaufen, so muß das Verhältnis der bewegten Intensität von H_α zu derjenigen von H_β im zweiten Fall größer sein als im ersten. Es muß also bei konstanter Geschwindigkeit der Kanalstrahlen das Verhältnis der bewegten Intensitäten H_α/H_β mit sinkendem Druck ab-, mit steigendem Druck zunehmen. In diesem Beispiel sind ja alle Voraussetzungen der obigen allgemeinen Folgerung erfüllt. Es nimmt nämlich entlang der H-Serie die Leuchtdauer mit steigender Gliednummer zu und zudem ist unter den Umständen, unter denen zumeist der Kanalstrahlen-Dopplereffekt beobachtet wird, die mittlere Lebensdauer der Kanalstrahlen von der Ordnung $2 \cdot 10^{-9}$ sec, die Leuchtdauer von H_α zwar kleiner als $4 \cdot 10^{-7}$, diejenige von H_β bereits annähernd von der Ordnung 10^{-7} sec, also erheblich größer als die mittlere Lebensdauer.

Messungen über die Abhängigkeit des Verhältnisses der bewegten Intensitäten H_α/H_β von dem Gasdruck bei annähernd konstanter Geschwindigkeit der Kanalstrahlen sind nun bereits vor einiger Zeit von L. Vegard¹⁾ angestellt worden.

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 39. p. 143. 1912.

Wenn ich auch nicht allen seinen Deutungen seiner Resultate zustimmen kann und derartige Messungen ihrer Schwierigkeit wegen nicht genau sein können, so halte ich das Resultat Vegards in dem angegebenen Punkte doch für zuverlässig. Dieses Resultat steht nun in voller Übereinstimmung mit der obigen Folgerung. Vegard findet nämlich, daß in der Tat das Verhältnis H_α/H_β mit sinkendem Druck kleiner wird.

Es liegt nahe, in der obigen Weise auch den Fall durchzuprüfen, daß bei konstantem Gasdruck auf dem Wege der Kanalstrahlen deren Geschwindigkeit vergrößert und damit die Lebensdauer der Strahlenteilchen verkürzt wird. Indes ist dieser Fall dadurch verwickelt, daß dann gleichzeitig auch die Art (Intensität) der Zusammenstöße der Kanalstrahlen mit den Gasmolekülen geändert wird.

Eine weitere Beobachtung, welche sich auf Grund der beschriebenen neuen Serienercheinung leicht deuten läßt, ist folgende. Wie L. Vegard ¹⁾ festgestellt hat, ist bei niedrigem Gasdruck das Verhältnis der bewegten Intensität von H_α zu derjenigen von H_β in den Kanalstrahlen größer als das Verhältnis der ruhenden Intensitäten dieser Linien. Dies erklärt sich daraus, daß der Träger der ruhenden Serienlinien dank seiner kleineren Geschwindigkeit eine sehr viel größere Lebensdauer als der Träger der bewegten Linien besitzt und darum in Seriengliedern von größerer Leuchtdauer verhältnißlich mehr Energie ausstrahlen kann.

Die in der vorliegenden Arbeit beschriebene neue Erscheinung des zeitlichen Verlaufs der Lichtemission längs einer Spektralserie läßt hinsichtlich deren Ursprung gewisse Folgerungen negativen und positiven Inhalts zu. Diese bilden im Zusammenhang mit anderen Erscheinungen den Gegenstand einer besonderen Abhandlung an anderer Stelle.

Aachen, Physik. Institut d. Techn. Hochschule,
Anfang Februar 1916.

1) L. Vegard, Ann. d. Phys. 39 p. 111. 1912.

(Eingegangen 23. Februar 1916.)



3 2 1
→ wachsende λ
Fig. 1.



Pyrit

Diamant

Pt-Linien

Fig. 2.



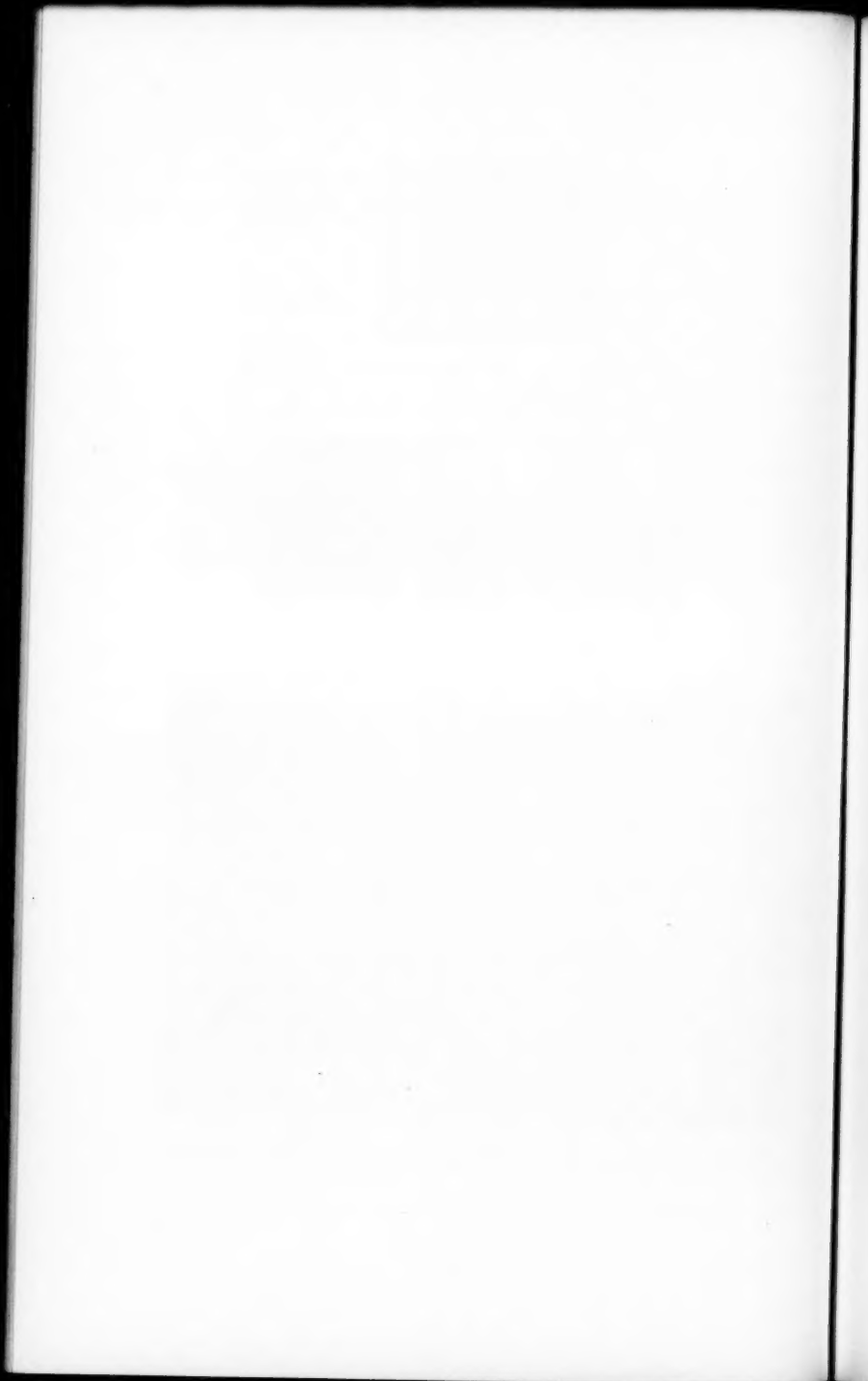
Fig. 3.

→ wachsende λ

Pd- α_1 , α_2 II. Ordnung = „1“ der Fig. 1 dieser Tafel

Die eingezeichnete Kurve K entspricht der Linienform der Pt-Linien auf Fig. 5, Tafel II.

E. Wagner.



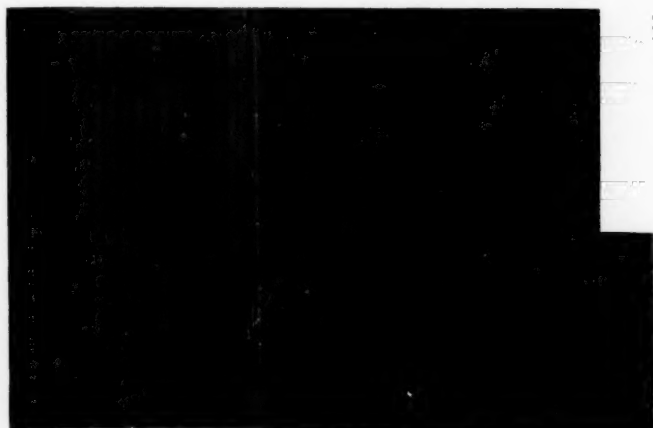


Fig. 4. —→ wachsende λ
Pd- β II. Ordnung = „3“ der Platte Fig. 1, Tafel I

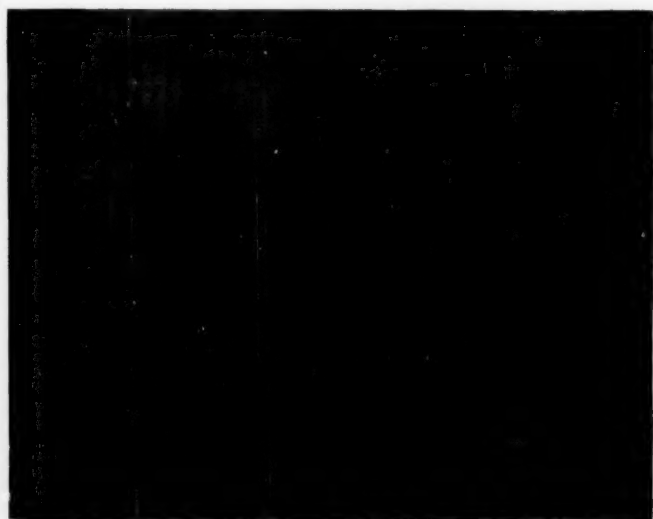
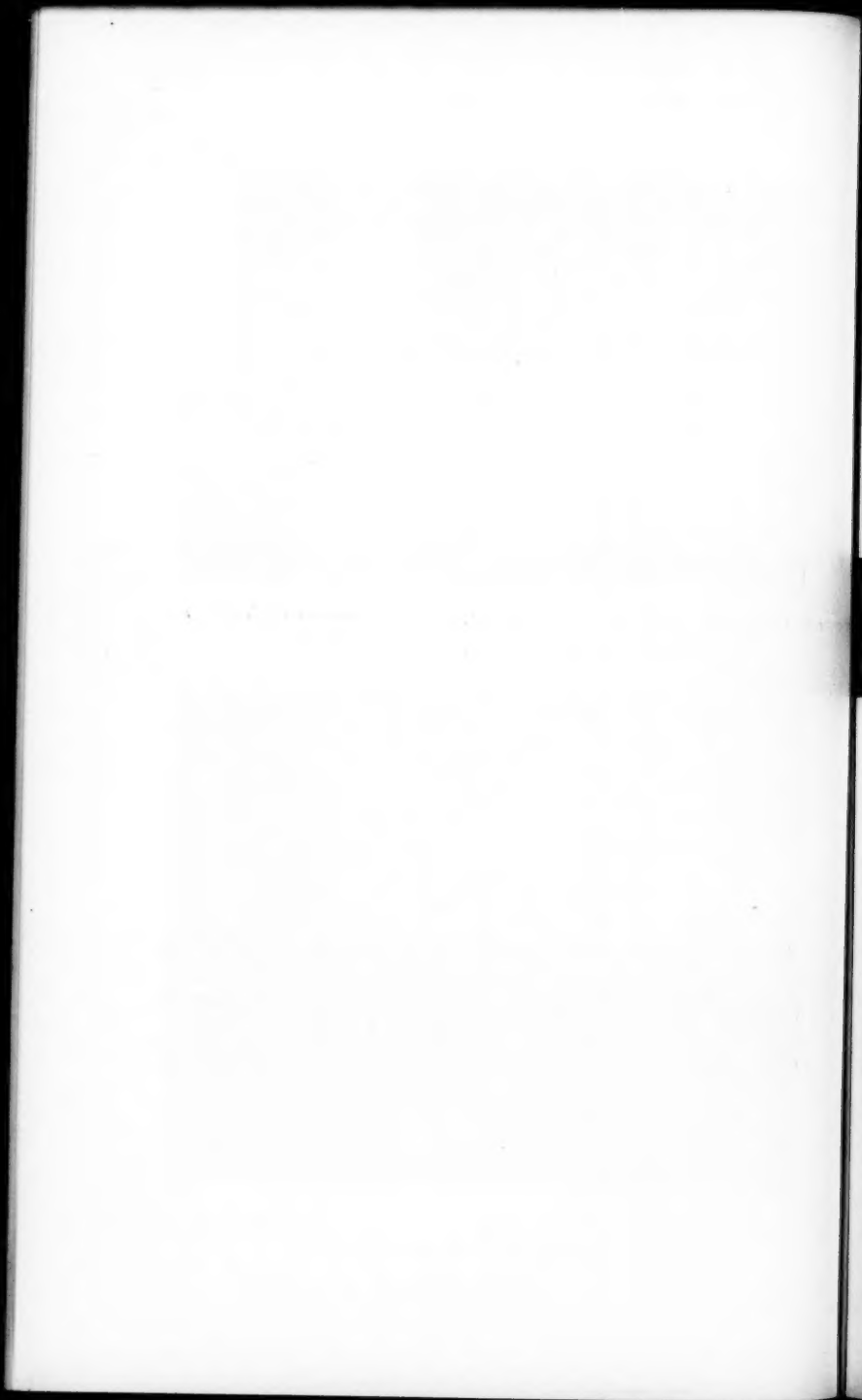


Fig. 5. —→ wachsende λ
Pt- β , γ I. Ordnung = „2“ der Platte Fig. 1, Tafel I

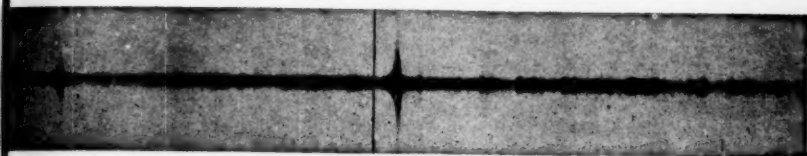
E. Wagner.





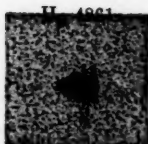
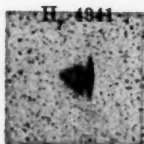
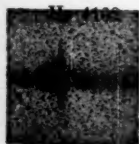
\uparrow Al \uparrow N
 3962 3995

Fig. 1.



\uparrow
H₃

\uparrow \uparrow
 H₁ H₂ 4359
 Fig. 2.

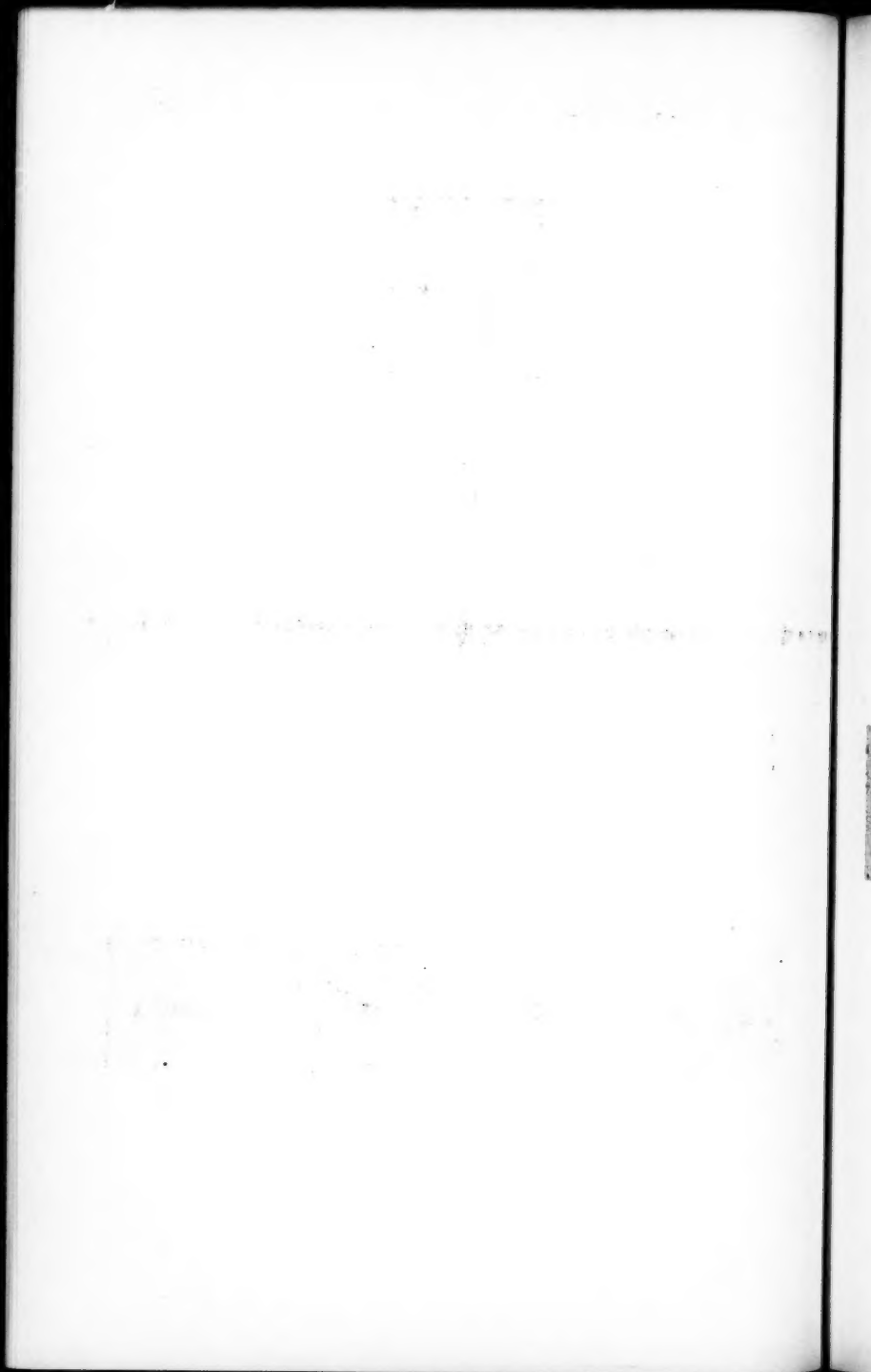


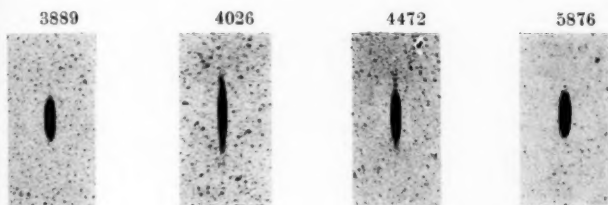
4 3 2 1

H. 1. Nebenserie.

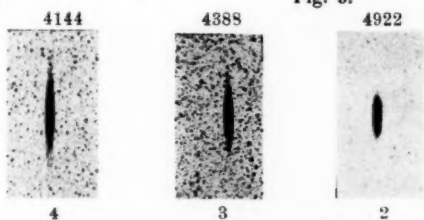
Fig. 3.

J. Stark.

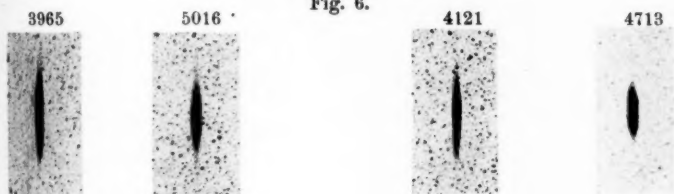




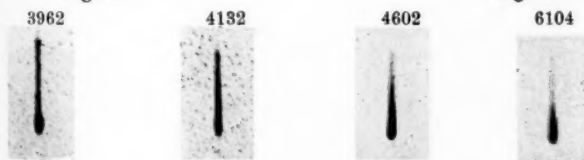
2 3 2 1
He I. Haupts. 1. Nebenserie.
Fig. 4. Fig. 5.



4 3 2
He II. 1. Nebenserie.
Fig. 6.



3 2 3 2
He II. Haupts. He I. 2. Nebenserie.
Fig. 7. Fig. 8.



Al 3 2 1
Fig. 9. Fig. 10. Li. 1. Nebenserie.

J. Stark.